¿Por qué enseñar matemáticas en economía mediante un enfoque distinto que el que se usa en la educación media superior?

Cuatro razones y dos programas introductorios para cursos piloto del primer y segundo semestres de la licenciatura escolarizada de la Facultad de Economía

Martín Puchet Anyul
Profesor titular de Métodos cuantitativos

La Comisión de matemáticas que ha hecho el trabajo de revisar los programas vigentes y hacer una propuesta de consenso ha presentado un contenido compuesto por las siguientes unidades:

I. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA
II. FUNCIONES
III. LÍMITES Y DERIVADA DE UNA FUNCIÓN
IV. CÁLCULO INTEGRAL
V. CÁLCULO DIFERENCIAL: FUNCIONES DE N-VARIABLES INDEPENDIENTES
VI. ÁLGEBRA MATRICIAL
VII. ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

Sin duda esta propuesta tiene, por lo menos, dos méritos indudables y fundamentales: haber logrado consenso y proponer un enfoque coherente desde el inicio.

En el Primer Foro dedicado al Diagnóstico del proceso de reforma académica de la licenciatura escolarizada presenté el documento "Sobre la enseñanza de las matemáticas en economía". La idea central del texto fue plantear, de una forma estratégica y de largo plazo, como debía concebirse y organizarse la enseñanza partiendo de una valoración de los conocimientos previos de los estudiantes, una descripción de las matemáticas usadas por la corriente principal de la economía, una revisión de características distintivas de las matemáticas que se usan en economía y una consideración de los desafíos explicativos a que, la crisis económica de 2008, ha sometido a la disciplina económica y a sus practicantes. Ese es un marco demasiado amplio para propuestas de programas específicos aunque el documento contiene una maqueta general de los programas de todos los cursos de licenciatura.

En este nuevo documento, menos ambicioso, se plantea una posición distinta de la que los colegas de la Comisión de matemáticas han logrado formular, estructurar y respaldar por medio de un arduo trabajo. La pretensión de este nuevo planteamiento es dar razones que fundamenten programas iniciales diferentes a los propuestos por los colegas y que puedan ser impartidos como programas de cursos pilotos para estudiantes interesados en su formación matemática.

Las razones del planteamiento son las siguientes.

1) El “enfoque de la prepa” está organizado a partir de una visión histórica de las matemáticas y se orienta hacia las aplicaciones a las ciencias exactas y las ingenierías.

Se enseña básicamente un curso de álgebra, uno de geometría analítica y uno de cálculo diferencial e integral. Cuando se le pregunta a los estudiantes de primer ingreso cuáles de estos cursos estudiaron contestan con cierta seguridad que álgebra, con un poco menos geometría analítica y con mucho menos o casi ninguna certeza cálculo diferencial.

Además, en los cursos de filosofía, los estudiantes reconocen con dificultad que estudiaron algo de lógica. Por lo general, lo aceptan cuando se les dice si alguna vez escucharon que: “todos los hombres son mortales”, “Platón es hombre”, por lo tanto, “Platón es mortal”. Junto con los silogismos algunos recuerdan que algún profesor expuso que había enunciados que se conectaban con partículas como ‘y’, ‘o’.

También se admite que en el curso de física estudiaron las fuerzas y que éstas se representan mediante unas flechas que el profesor llamaba vectores. A veces recuerdan que sumaban las fuerzas tomando en cuenta la dirección del hilo o cable que usaban para jalar de algún cuerpo.

Por último, muy pocos admiten que en algún curso estudiaron como contar mediante fórmulas de combinaciones o de arreglos o de ordenaciones. Y menos todavía recuerdan que en algún curso alguien dijo que la frecuencia con que algo efectivamente ocurre, respecto al número de veces en que se hace alguna actividad para que suceda, resulta en las chances de ocurrencia de un resultado. Cuando se les dice: la frecuencia con que ha ganado en CU el equipo de los Pumas, en el último mes, es una en tres y, por tanto, la chance de que gane el próximo partido es una entre tres, muchos protestan.

De todas formas, esta reseña de contenidos ilustra algunos rasgos importantes del “enfoque de la prepa”:

a) Siguiendo el curso de la historia que va de mediados del siglo XV a principios del XVIII, las matemáticas que principalmente se enseñan son el álgebra, la geometría analítica y el cálculo.
b) Estas matemáticas son las que surgieron, en gran medida, alrededor de la astronomía, la física, la navegación y las actividades militares; son la base para estudiar ciencias exactas y algunas ingenierías.
c) La lógica, la geometría vectorial, el cálculo combinatorio y el cálculo de la probabilidad de ocurrencia han ocupado muy poco del tiempo y el pensamiento de

los estudiantes antes de llegar a la educación superior; no obstante, excepto la lógica, las otras ramas fueron concomitantes en la historia de las matemáticas de esas tres que ocupan el foco de atención preponderante pero su enseñanza no forma parte del "enfoque de la prepa" ni de su tronco formativo.[1]

d) En las disciplinas empíricas como la economía distinguir entre la deducción y otras formas de razonamiento (o entre las bases de la argumentación determinada e indeterminada), comprender no sólo el vínculo entre números y puntos sino también entre arreglos de números y vectores, y entender cómo contar ocurrencias junto con medir la posibilidad de que sucedan son tan importantes como manejar expresiones algebraicas, relacionar fórmulas con figuras geométricas y aproximar curvas mediante rectas.

Se impone una primera conclusión: la enseñanza de las matemáticas mediante el "enfoque de la prepa" no parece ser el más adecuado para estudiar disciplinas empíricas, en particular de las ciencias sociales y, aún menos, la economía que parte de una forma de obtener la información que se basa en balances de tenencias y deudas (o activos y pasivos), o en la contabilidad de entradas y salidas, ingresos y gastos, ganancias y pérdidas, beneficios y costos.

2) El conjunto de conocimientos matemáticos con que ingresan los estudiantes no está estructurado ni está organizado de manera tal que sirva para plantear y resolver problemas.

Por lo general, las ideas matemáticas que logran manejar la mayoría de los estudiantes están referidas a tres compartimentos estancos: los números, los puntos que forman líneas o figuras geométricas y las fórmulas cuyos términos representan números. Para cada compartimento conocen algunas transformaciones de los elementos del compartimento mismo en otros.

Por ejemplo, de los números saben algunas operaciones y sus propiedades para diferentes conjuntos – naturales, enteros, racionales, reales; es así que la suma y la resta, la multiplicación y la división junto con algunas propiedades como la asociativa, la conmutativa y la uniforme son las más conocidas; menos claras están la potenciación y la radicación así como las propiedades de los exponentes y mucho menos la definición del logaritmo y sus respectivas propiedades.

[1] Ese periodo de la historia de las matemáticas, que va del álgebra al cálculo pasando por la geometría analítica, y sus ramas concomitantes, junto con la exposición de sus principales conceptos está relatado en Kline, Morris (2009 [1985]*), *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, México: FCE. *: entre corchetes está el año de la edición original.

Respecto de las líneas y figuras geométricas tienen conocimientos progresivamente más vagos de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse, luego de las semi – rectas, los segmentos, los ángulos, los polígonos, en particular del triángulo y los paralelogramos, del círculo y el interior de otras curvas, y mucho más imprecisos de los ángulos sólidos y de los cuerpos – paralelepípedos, conos, paraboloides, elipsoides. Los teoremas del triángulo y la trigonometría plana se manejan aunque siempre con cierto grado de dificultad.

Las expresiones algebraicas enteras y racionales se saben transformar, simplificar y reducir con mediana pericia y cuando se trata de pasar de binomios a polinomios y de productos a cocientes algebraicos las habilidades son menos claras. De las ecuaciones lineales y cuadráticas se conocen fórmulas de resolución pero se carece siempre de los conceptos mismos de ecuación, identidad, conjunto solución, propiedades de las transformaciones algebraicas que se requieren y posibilitan solucionar distintos casos.

Sobre estas bases no completamente sólidas, inconexas y concebidas mediante definiciones no siempre claras de la aritmética y la geometría elementales y de algunos conocimientos algebraicos se construyeron los conceptos y sus relaciones para pasar a los cursos de álgebra, geometría analítica y cálculo elementales durante la educación media superior. Además cada una estas ramas, estudiadas en la educación media superior, se mantiene dentro de fronteras cerradas que hacen imposible comprender vínculos entre ellas y hacer conceptualizaciones más generales.

En consecuencia, la estructuración de los conocimientos, el establecer conceptos que hagan posible comprender las estructuras matemáticas subyacentes en las distintas ramas estudiadas y que, a la vez, permitan mostrar cómo se obtienen resultados mediante ejercicios demostrativos son tareas pendientes.[2] Sobre todo estos hechos son sumamente necesarios si se piensa que las matemáticas tienen que servir, en economía, para expresar conceptos y relaciones entre ellos que tienen significados y sentidos en relación con entidades empíricas de procesos económicos. Cuando se toma en cuenta el papel sintáctico de las matemáticas en relación con la semántica que proviene de la economía, tener a la mano un conocimiento matemático estructurado es imprescindible.

La formación que antecede a la licenciatura carece de estructuración, en particular, de nociones elementales de lógica y teoría de conjuntos que hagan posible construir la “casa de las matemáticas” desde sus cimientos. Mostrando como, en muchos sentidos, cada habitación se sostiene en conceptos y definiciones comunes se hace posible que los

[2] Los libros de Papy, Georges (1969 [1964]), *Matemática moderna I*, (1970a [1968]), *Matemática moderna II*, (1970b [1967]), *Matemática moderna III*, Buenos Aires: EUDEBA, sirven para aquilatar el sentido de una formación estructurada de los conocimientos matemáticos de la educación secundaria y media superior.

estudiantes distingan qué contiene cada habitación, cómo se estructuran sus contenidos respectivos y de qué forma se comunica una con otra.

También esta carencia de estructuración afecta el hecho de que dentro de cada estructura matemática es posible plantear problemas determinados y resolverlos de manera organizada. En ese sentido mucho del conocimiento adquirido no se ha desarrollado teniendo en mente los problemas que resuelve. Por ello se requiere una presentación que privilegie cómo, en cada lugar de las matemáticas, conceptos, definiciones y sus relaciones, teoremas que se obtienen de postulados, y consecuencias inmediatas sirven para resolver algunas colecciones de problemas bien planteados.[3]

Surge así una segunda conclusión: se requiere una enseñanza de las matemáticas que haga posible re – estructurar los conocimientos previos: aritmética, geometría y álgebra básicas (las que se enseñan en primaria y secundaria), álgebra, geometría analítica y cálculo (que se enseñan en la educación media superior), nociones de lógica, cálculo combinatorio, nociones de probabilidad y estadística básicas y geometría vectorial (que se enseñan, de manera dispersa, en cursos de filosofía, álgebra, estadística y probabilidad o física). Este ejercicio de poner en su lugar distintas partes del conocimiento previo para construir la "casa de las matemáticas" debe hacerse mediante conceptos de lógica matemática y de teoría de conjuntos y poniendo el acento en la forma en que distintas estructuras matemáticas sirven para resolver problemas específicos.[4]

3) Las matemáticas en la economía se usan según una tradición específica acorde con los problemas que ha planteado la disciplina a lo largo de su historia.

Una mínima taxonomía de esa tradición registra el uso de las matemáticas en:

i) Descripciones de las interacciones entre agentes y entre sus conglomerados – contabilidad de la producción y el intercambio, contabilidad nacional, contabilidad social, contabilidad integrada económica y ecológica,
ii) Extracciones de información empírica sobre relaciones entre unidades que representan agentes o conglomerados, ubicadas en distintos lugares o en distintos periodos a partir de datos cuantitativos y cualitativos – análisis de insumo – producto y sus refinamientos, econometría de series de tiempo, de corte transversal y de panel con variables continuas y discretas, modelos estadísticos paramétricos y no paramétricos,

[3] Sobre la importancia y la forma de enseñar matemáticas mediante problemas ver Polya, Georg (1972 [1957]) *¿Cómo plantear y resolver problemas?*, México: Trillas.
[4] Tanto el libro de Kline citado arriba, como el de Courant, Richard y Herbert Robbins (2002 [1996]), *¿Qué son las matemáticas?*, México: FCE, muestran como surgen, se plantean y se resuelven problemas en el contexto de ramas básicas de las matemáticas.

iii) Teorías de la determinación de los precios (o de las cantidades) – modelos ricardianos, neoclásicos, marxianos, keynesianos y sus versiones neo o pos de cada teoría,

iv) Teorías de los comportamientos no estratégicos y estratégicos de los agentes en interacción – modelos clásicos o neoclásicos de conducta de agentes u organizaciones situados en mercados en competencia, modelos de conducta de agentes o de organizaciones situados en mercados con diferente grado de competencia, modelos de conducta estratégica de agentes u organizaciones y de formación de instituciones no mercantiles

v) Teorías de la evolución de cantidades y de precios – modelos de desarrollo, de crecimiento y de ciclos.

En particular, entre 1930 y 1960, se produjo una eclosión de ramas de las matemáticas que se usaron en la economía y que se extendieron por demandas surgidas de la resolución de problemas económicos. Entre ellas se destacan: álgebra lineal de matrices no negativas y teoría de grafos basadas en matrices de transacciones, probabilidad y estadística aplicadas a datos no replicables u observacionales, optimización lineal y no lineal basadas en teoría de la convexidad, teoría de juegos en sus formas extensiva, normal y axiomática, sistemas dinámicos lineales y no lineales en tiempo continuo y discreto definidos en espacios de medida.[5]

Un requerimiento importante de la formación en matemáticas de un economista será entonces la siguiente: tener la posibilidad de leer, con capacidad de comprenderlas, las obras que se produjeron en esos 30 años usando y ampliando las matemáticas.

4) Los cursos deben ser motivadores (y motivados), constructivos (y constructores) y rigurosos (y no rigorista) para evitar tanto la perspectiva basada en recetas como aquella solo sustentada en demostraciones.

Los cursos tienen que estimular a los estudiantes, deben ser motivadores. Para ello deben ser motivados, tienen que dar y explicar las razones o los motivos por los cuales surgieron ciertos problemas y preguntas matemáticas. La sola enunciación clara del problema no es suficiente, se necesita mostrar los contextos en que surge cada asunto matemático.

Como hay amplias, endebles y dispersas bases matemáticas en la formación previa de los estudiantes los cursos tienen que re – estructurar y usar dichas bases, deben hacerlo de una manera constructiva que reconozca y tenga aprecio por lo que profesores y

---

[5] En la introducción histórica del libro de Arrow, Keneth J. y Michael D. Intrilligator (1984), *Handbook of Mathematical Economics*, North – Holland, volumen 1, y en sus capítulos está la descripción de este proceso y de muchos de los desarrollos de las matemáticas en relación con el análisis económico.

estudiantes hicieron antes. Al mismo tiempo tienen que ser cursos constructores en la medida que formen nuevas estructuras donde converjan y se articulen los conocimientos previos y en las que los estudiantes se vayan sintiendo confiados y seguros.

El tratamiento de los temas y de los conceptos tiene que ser riguroso, es decir, exacto, preciso, minucioso. No obstante, no debe ser rigorista por su severidad y rigidez sino que tiene que conducir a la comprensión plena de la materia.

Esta perspectiva se ubica a medio camino entre aquella que enseña y reproduce fórmulas y recetas insustituibles en todo cálculo, o en toda tarea que requiera un conjunto de instrucciones secuenciales para llegar a un resultado lo que llamamos un algoritmo, y esa otra visión que demuestra, de manera incesante, mediante un esquema rígido de definiciones y axiomas, teoremas que se deducen de definiciones y axiomas, y corolarios que son consecuencias directas que se demuestran mediante teoremas demostrados.

En la actividad de construir estructuras matemáticas sobre las bases adquiridas mediante motivaciones adecuadas y con rigor se necesita combinar manejo de algoritmos, explicaciones de donde vienen y demostraciones que hagan palpable la fuerza de la argumentación deductiva que usan las matemáticas.

Las cuatro razones expuestas motivan los siguientes programas de cursos iniciales de matemáticas para la licenciatura escolarizada de la Facultad de Economía. Partes o versiones parciales de estos cursos han sigo impartidos en la Facultad durante los últimos veinte años en las asignaturas de *Introducción a los métodos cuantitativos* y de *Matemáticas I*.

La propuesta que se hace es que se incluyan versiones más comprensivas como cursos piloto[6] para estudiantes interesados, previa presentación y explicación de sus razones, en los primeros dos semestres de la licenciatura.

Matemáticas I

Objetivos

Este curso tiene como primer objetivo presentar conceptos de la lógica de primer orden y de la teoría intuitiva de conjuntos con la finalidad de re – construir conocimientos matemáticos básicos de aritmética, álgebra y geometría. Un segundo objetivo es mostrar y hacer una reconstrucción de conceptos fundamentales de la aritmética, el álgebra y la geometría que conduzcan a la geometría analítica elemental.

[6] Un curso piloto es un curso curricular donde se experimentan nuevos temas o métodos. El estudiante interesado se inscribe de manera conjunta con los otros cursos para ser partícipe de la experiencia. Si el estudiante lo desea la calificación del curso piloto puede ser la de la asignatura correspondiente.

Temario

1. *Lógica de primer orden*. Simbolización y formalización del lenguaje ordinario; predicación; enunciados y conectivos; predicados y cuantificadores; deducción lógica.(3 sesiones).

2. *Conjuntos*. Relacionar dos conjuntos: operaciones. Operaciones y enunciados compuestos. (2 sesiones).

3. *Enumeración*. Sistema axiomático de los números naturales. Inducción completa. Sucesiones, sumas y productos finitos. Noción de infinitud. Coordinación de conjuntos. (2 sesiones)

4. *Métodos de demostración y teoremas.* Métodos clásicos de demostración. Identificación de los métodos en teoremas importantes de la aritmética, la geometría, el álgebra y la estadística elementales. (3 sesiones)

5. Demostración de teoremas importantes. Demostración por recurrencia de teoremas de la aritmética. Demostración directa de teoremas geométricos y algebraicos. Demostraciones por métodos indirectos de teoremas importantes. (6 sesiones)

6. *Producto cartesiano, relaciones y funciones*. Propiedades de las relaciones: reflexividad, simetría y transitividad; relaciones de orden y equivalencia: algunas proposiciones importantes; composición de funciones: inyectividad y sobreyectividad: función inversa; contar elementos de un conjunto y relaciones entre conjuntos; cálculo combinatorio; binomio de Newton. (8 sesiones).

7. *Geometría analítica*. Gráficas y expresiones algorítmicas: sus definiciones conjuntistas. Representación geométrica de relaciones y funciones algebraicas: coordenadas y números reales. Operaciones. Ecuaciones lineales y cuadráticas y sus conjuntos solución en el plano y el espacio cartesianos: rectas y planos, circunferencias y esferas, parábolas y paraboloides, elipses y elipsoides, otras cónicas. (8 sesiones)

Bibliografía.

[1] Cárdenas, et al (1973), *Álgebra superior*, México: Trillas, 1981.
[2] Murdoch, D. C. (1965), *Geometría analítica con vectores y matrices*, México: Limusa-Noriega, 1990.*
[3] Solow, Daniel (1981), *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*, México: Limusa, 1987.
[4] Suppes, Patrick y Shirley Hill (1963), *Introducción a la lógica matemática (Primer curso de lógica matemática)*, México: Reverté, 1996.*

Matemáticas II

Objetivos

Este curso está destinado a presentar los conceptos básicos de dos ramas de la matemática que son relevantes por sus aplicaciones a la teoría económica y a la economía aplicada. Ellas son el álgebra lineal y la teoría de la convexidad. El temario está organizado de manera constructiva y apunta hacia la adquisición de destreza en el manejo de algunos conceptos claves. A diferencia del curso introductorio el presente está orientado por nuevos conceptos más que por la recuperación de los ya conocidos y utilizados.

Temario

1. *Álgebra lineal*. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Determinantes. Método de Crámer. Operaciones elementales y método de Gauss. Geometría de los vectores: coordenadas, norma y teoremas trigonométricos. Rectas, planos e hiperplanos. Teoremas de existencia de solución de los sistemas de ecuaciones. (14 sesiones)

2*. Convexidad y optimización*. Sistemas de desigualdades. Conos poliédricos. Separación de conjuntos convexos. Geometría de las funciones de una y de dos variables. Zonas de crecimiento y decrecimiento. Concavidad. Puntos de máximo, de mínimo y de silla. Optimización de funciones lineales y cuadráticas con restricciones mediante separación de conjuntos. (14 sesiones)

Bibliografía

[1] Goloviná, L. I. (1974), *Algebra lineal y algunas de sus aplicaciones*, Moscú: Mir, 1980.*
[3] Kemeny, J. G., H. Mirkil, J. L. Snell y G. L. Thompson (1959), *Finite Mathematical Structures*, Prentice Hall. (Hay traducción al español en EUDEBA).
[3] Murdoch, D. C. (1965), *Geometría analítica con vectores y matrices*, México: Limusa-Noriega, 1990.
[4] Solodóvnikov, A. S. (1980), *Sistemas de desigualdades lineales*, Moscú: Mir.*

* Libros de texto principales para seguir el curso.