III. Variables aleatorias Discretas y sus Distribuciones de Probabilidad

Variable aleatoria discreta

Definición

Una variable aleatoria se llama discreta si se puede contar su conjunto de resultados posibles.

Las variables aleatorias discretas son variables aleatorias cuyo intervalo de valores es finito o contablemente infinito.

Distribución de Probabilidad discreta

Definición

Lista de los resultados de un experimento con las probabilidades que se esperan, se asociarán a esos resultados.

Si x es una variable aleatoria discreta, la función dada por f(x) para cada x contenida en el intervalo de **x** se denomina **función de probabilidad**, o **distribución de probabilidad**, de **x**.

Una función puede fungir como la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta x si y sólo si sus valores, **f(x)**, cumple las condiciones siguientes:

a) $\mathbf{f(x) \geq 0}$ para cada valor contenido en su dominio
b) $\mathbf{\sum f(x) = 1}$, donde la sumatoria se extiende sobre todos los valores contenidos en su dominio.

Función de distribución acumulativa

La distribución acumulada **F(x)** de una variable aleatoria discreta **X**, cuya distribución de probabilidad es **f(x)**, es:

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x) =} \sum_{t \leq x} f(t) \quad \textbf{para} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Esperanza Matemática

Sea **X** una variable aleatoria con distribución de probabilidad **f(x)**. La media o valor esperado de **X** es:

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x f(x)$$

Significado de la esperanza

Como valor medio teórico de todos los valores que puede tomar la variable. Representa una medida de centralización.

Varianza

Definición

Medida del cuadrado de la distancia promedio entre la media y cada elemento de la población.

Si **X** es una variable aleatoria con una distribución de probabilidad, **f(x),** y media μ. La varianza de **X** es calculada por medio de:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

Desviación estándar

Definición

1. Es una medida de dispersión de la misma dimensión física de la variable y que representa por medio de la letra σ.
2. Raíz cuadrada positiva de la varianza; una medida de la dispersión, expresada en las mismas unidades que los datos originales y no en las unidades cuadradas de la varianza.

III.1. Distribución de Probabilidad Uniforme

Definición

Si la variable aleatoria **X** asume los valores $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$,…..$\mathbf{x_k}$, con iguales probabilidades, entonces la distribución discreta uniforme es:

$$f(x;k) = \frac{1}{k}$$

$$x = x_1, x_2, \ldots. x_k$$

La media se calcula con la siguiente fórmula:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f(x_i)}{k}$$

Y su varianza con:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (f(x_i) - \mu)^2}{k}$$

III.2. Distribución de Probabilidad Bernoulli

Definición de ensayo de Bernoulli

El Ensayo de Bernoulli consiste en realizar un sólo experimento (ensayo) en el cual existen únicamente dos posibles resultados:

$$S = \{ \text{éxito, fracaso} \}$$

Definimos a la variable aleatoria de Bernoulli de la siguiente forma:

$$I = \begin{cases} 0; \text{ Si el resultado del ensayo es “fracaso”.} \\ 1; \text{ Si el resultado del ensayo es “éxito”.} \end{cases}$$

A ésta última se le conoce como “función indicadora”

III.2. Distribución de Probabilidad Bernoulli

Supongamos que en un ensayo de Bernoulli la probabilidad de obtener éxito es p. Como el ensayo tiene únicamente dos resultados posibles, entonces la probabilidad de obtener un fracaso es 1-p. llamaremos q a la probabilidad de fracaso.

$$p = \text{Probabilidad de éxito}$$

$$q = (1-p) = \text{Probabilidad de fracaso}$$

Con esto, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Bernoulli es:

$$P(I) = \begin{cases} q; & I = 0 \\ p; & I = 1 \\ 0; & \text{c.o.c} \end{cases}$$

III.2. Distribución de Probabilidad Bernoulli

El proceso de Bernoulli debe cumplir con las siguientes propiedades:

1. El experimento consiste en n intentos repetidos.
2. Los resultados de cada uno de los intentos pueden clasificarse como un éxito o como un fracaso.
3. La probabilidad de éxito, representada por p, permanece constante para todos los intentos.
4. Los intentos repetidos son independientes

III.2. Distribución de Probabilidad Bernoulli

La **media** o valor esperado de la variable aleatoria de Bernoulli es:

$E[I] = 0q + 1p = p$ $\boldsymbol{\mu_I = p}$

La **varianza** de la variable aleatoria de Bernoulli es:

$V[I] = E[I^2] - E[I]^2$

$V[I] = (0^2q + 1^2\,p) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$

$\boldsymbol{\sigma_I^2 = pq}$

III.2. Distribución de Probabilidad Bernoulli

Ejemplo:

En la fabricación de neumáticos se seleccionan, de manera aleatoria, tres de ellos. Se hace una inspección de los neumáticos y se clasifican en defectuosos y no defectuosos. El proceso de fabricación produce en total el 20% de neumáticos defectuosos.

Se considera un éxito la obtención de un artículo defectuoso

III.2. Distribución de Probabilidad Bernoulli

Solución:

El espacio muestral es el siguiente:

Resultado	x
(ND)(ND)(ND)	0
(D)(ND)(ND)	1
(ND)(D)(ND)	1
(ND)(ND)(D)	1
(ND)(D)(D)	2
(D)(ND)(D)	2
(D)(D)(ND)	2
(D)(D)(D)	3

Donde: D es defectuoso y ND es no defectuoso

III.2. Distribución de Probabilidad Bernoulli

- El número de éxitos es una variable aleatoria que asume valores enteros de cero a tres.
- Se obtienen las probabilidades para los posibles resultados.

  Con:

  p = 0.20

  q = 0.80

Se calculan las probabilidades respectivas:

P[(ND)(ND)(ND)] = P(ND)P(ND)P(ND) = (0.80)(0.80)(0.80) = 0.512
P[(D)(ND)(ND)] = **P(D)**P(ND)P(ND) = (0.20)(0.80)(0.80) = 0.128
P[(ND)(D)(ND)] = P(ND)**P(D)**P(ND) = (0.80)(0.20)(0.80) = 0.128
P[(ND)(ND)(D)] = P(ND)P(ND)**P(D)** = (0.80)(0.80)(0.20) = 0.128
$\sum = 0.384$
P[(ND)(D)(D)] = P(ND)**P(D)P(D)** = (0.80)(0.20)(0.20) = 0.032
P[(D)(ND)(D)] = **P(D)**P(ND)**P(D)** = (0.20)(0.80)(0.20) = 0.032
P[(D)(D)(ND)] = **P(D)P(D)**P(ND) = (0.20)(0.20)(0.80) = 0.032
$\sum = 0.096$
P[(DDD)] = **P(D)P(D)P(D)** = (0.20)(0.20)(0.20) = 0.008

III.2. Distribución de Probabilidad Bernoulli

Con los cálculos anteriores se obtiene la distribución de probabilidad de x:

x	0	1	2	3
f(x)	0.512	0.384	0.096	0.008

El cuadro anterior muestra que:

a. Cuando no se tienen neumáticos defectuosos la probabilidad es de: 0.512
b. Cuando se tiene un neumático defectuoso la probabilidad es de: 0.384
c. Cuando se tienen dos neumáticos defectuosos la probabilidad es de: 0.096
d. Cuando se tienen tres neumáticos defectuosos la probabilidad es de: 0.008

El número de éxitos en n experimentos de Bernoulli recibe el nombre de variable aleatoria binomial

III.3. Distribución de Probabilidad Binomial

Consiste en realizar n veces el ensayo de bernoulli, de manera independiente uno de otro y suponiendo que la probabilidad de éxito p permanence constante en cada uno de ellos.

Por ejemplo: observar cinco artículos de un mismo lote y contar el número de artículos con defecto.

Definimos a la variable aleatoria de Binomial de la siguiente forma:

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \sum_{j=1}^{n} I_j$$

donde las I_j son variables aleatorias de Bernoulli independientes, cada una con media p y varianza pq.

Así definida, X representa entonces el número de éxitos obtenidos al realizar n veces el ensayo de Bernoulli.

III.3. Distribución de Probabilidad Binomial

Al realizar el ensayo binomial, la variable aleatoria puede adquirir los valores: X = {0,1,2,...,n}

Supongamos que se realizan ***n*** *ensayos de Bernoulli y la probabilidad de éxito es p, la distribución de X para n =2, 3 ó 4 es:*

Para n= 2

X	P(x)
0	q q = p^0q^2 (1 vez)
1	p q +
	q p = p^1q^1 (2 veces)
2	p p p^2q^0 (1 vez)

Para n= 3

X	P(x)
0	q q q = p^0q^3 (1 vez)
1	p q q +
	q p q +
	q q p = p^1q^2 (3 veces)
2	p p q +
	p q p +
	q p p = p^2q^1 (3 veces)
3	p p p = p^3q^0 (1 vez)

Para n= 4

X	P(x)
0	q q q q = p^0q^4
1	p q q q +
	q p q q +
	q q p q +
	q q q p = p^1q^3 (4 veces)
2	p p q q +
	p q p q +
	p q q p +
	q p p q +
	q p q p +
	q q p p = p^2q^2 (6 veces)
3	p p p q +
	p p q p +
	p q p p +
	q p p p = p^3q^1 (4 veces
4	p p p p = p^4q^0

Se observa que el término genérico es p^xq^{n-x} repetido un determinado número de veces ¿cuántas?

III.3. Distribución de Probabilidad Binomial

Supongamos que se obtienen consecutivamente primero los X éxitos y luego los n-x fracasos:

$$A=\{\underbrace{e, e, e, e, \ldots e,}_{x\ \text{éxitos}} \underbrace{f, f, f, f, \ldots, f}_{n\text{-}x\ \text{fracasos}}\}$$

$$P(A)=p^x q^{n-x}$$

Para encontrar el número de formas en que se pueden obtener X éxitos y n-x fracasos, recordemos la expresión para el cálculo de permutaciones con grupos de objetos iguales:

$$P^{n}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ \ldots \ m_k!}$$

Hagamos m1=x y m2=n-x:

$$P^{n}_{x, n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = C^{n}_{x}$$

Es decir que el número de formas en que se pueden ordenar los éxitos y los fracasos es C(n,x)

III.3. Distribución de Probabilidad Binomial

Finalmente, tenemos que el término $p^x q^{n-x}$ se repite un numero de veces igual a C(n,x):

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}; & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0; & \text{c. o. c} \end{cases}$$

En forma resumida, la distribución de la variable aleatoria binomial es:

$$P(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Puesto que la forma de P(x) depende de p y de n, éstos son los párametros de la distribución binomial: P(x; n, p)

III.3. Distribución de Probabilidad Binomial

Definición

Un experimento de Bernoulli puede resultar en un éxito con una probabilidad **p** y en un fracaso con una probabilidad de **q = 1−p**

Entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial **X**, el número de éxitos en n experimentos independientes, es:

$$\mathbf{b(x; n, p)} = \binom{n}{x} \mathbf{p^x\, q^{n-x}} \qquad \mathbf{x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n.}$$

III.3. Distribución de Probabilidad Binomial

La media de la variable aleatoria binomial:

$E(X) = E[I_1 + I_2 + \cdots + I_n] = E[I_1] + E[I_2] + \cdots + E[I_n] = p + p + \cdots + p = np$

$$\mu_x = np$$

La varianza:

$V(X) = V[I_1 + I_2 + \cdots + I_n] = V[I_1] + V[I_2] + \cdots + V[I_n] = pq + pq + \cdots + pq = npq$

$$\sigma_x^2 = npq$$

la desviación estándar son:

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

III.3. Distribución de Probabilidad Binomial

La distribución binomial aparece cuando estamos interesados en el **número de veces que un suceso *A* ocurre (éxitos) en *n* intentos independientes de un experimento**.

P. ej.: # de caras en n lanzamientos de una moneda.

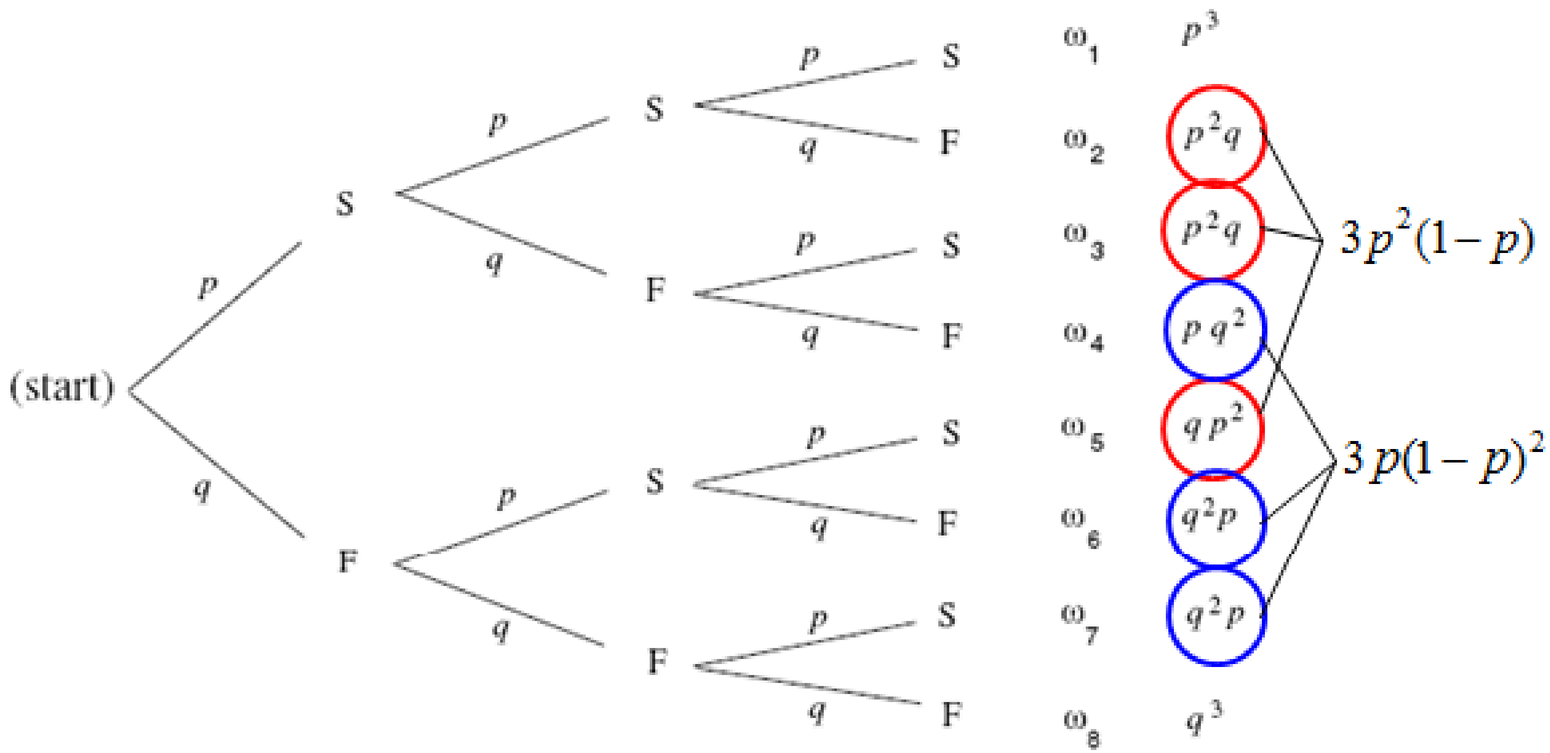
Si *A* tiene probabilidad ***p*** **(probabilidad de éxito)** en un intento, entonces ***1-p*** es la probabilidad de que *A* no ocurra **(probabilidad de fracaso)**.

III.3. Distribución de Probabilidad Binomial

Experimento aleatorio: $n = 3$ lanzamientos de una moneda.

Probabilidad de éxito en cada lanzamiento (cara) = p.

Probabilidad de fracaso en cada lanzamiento (cruz) = $1 - p = q$.



III.4. Distribución de Probabilidad Binomial Negativa

Definición

Una variable aleatoria x tiene una distribución binomial negativa y se denomina variable aleatoria binomial negativa, si y solo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$$

$$para:$$

$$x = k, k+1, k+2, \ldots..$$

La variable aleatoria X se puede definir como el número de ensayos de Bernoulli necesarios para obtener exactamente K éxitos.

III.4. Distribución de Probabilidad Binomial Negativa

Media:

$$\mu = \frac{k(1-p)}{p}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{k(1-p)}{p^2}}$$

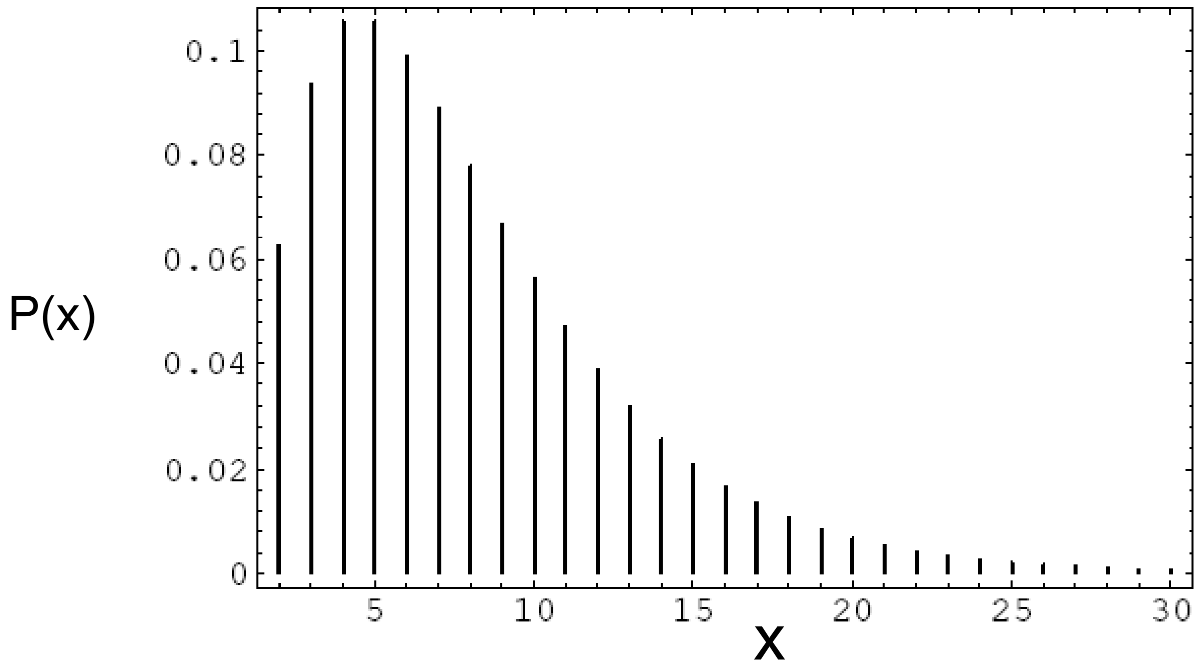
III.4. Distribución de Probabilidad Binomial Negativa

Ejemplo: disponemos de una moneda trucada con probabilidad de cara igual a p=0.25. La lanzamos hasta que obtenemos 2 caras.

La distribución del número de lanzamientos *x* será:

$$BN(r=2, p=0.25) = P(X=x) = \binom{x-1}{2-1} 0.25^2 (1-0.25)^{x-2},$$

$$x = 2,3,4,\ldots$$



III.5. Distribución de Probabilidad Geométrica

Definición

Si repetidos intentos independientes pueden resultar en un éxito con una probabilidad **p** y en un fracaso con una probabilidad de $\mathbf{q = 1 - p}$, entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria **X**, el número del intento en el cual ocurre el primer éxito es:

$$\mathbf{g(x; p) = pq^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots}$$

Equivalentemente, la probabilidad de que haya *x* fallos antes del primer éxito es:

$$\mathbf{g(x; q) = q^x p = (1\text{-}P)^x p}$$

III.5. Distribución de Probabilidad Geométrica

La **media** es:

$$\mu = \frac{1}{p}$$

La **varianza** es:

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

III.5. Distribución de Probabilidad Geométrica

Ejemplo:

Se lanza al aire una moneda cargada 8 veces, de tal manera que la probabilidad de que aparezca águila es de 2/3, mientras que la probabilidad de que aparezca sello es de 1/3.

Determine la probabilidad de que en el último lanzamiento aparezca una águila.

III.5. Distribución de Probabilidad Geométrica

Solución:

Si nosotros trazamos un diagrama de árbol que nos represente los 8 lanzamientos de la moneda, observaremos que la única rama de ese árbol que nos interesa es aquella en donde aparecen 7 sellos seguidos y por último una águila; como se muestra a continuación:

S S S S S S S A

Sí denotamos;

x = el número de repeticiones del experimento necesarias para que ocurra un éxito por primera y única vez = 8 lanzamientos

p = probabilidad de que aparezca una águila = p(éxito) = 2/3

q = probabilidad de que aparezca un sello = p(fracaso) = 1/3

III.5. Distribución de Probabilidad Geométrica

Entonces la probabilidad buscada sería:

P (aparezca una águila en el último lanzamiento) =

$$=p(S)*p(S)*p(S)*p(S)*p(S)*p(S)*p(S)*p(A)$$

$$= q*q*q*q*q*q*q*p$$

$$= pq^{x-1}$$

La fórmula a utilizar cuando se desee calcular probabilidades con esta distribución sería:

$$g(x; p) = pq^{x-1}$$

Donde:

p(x) = probabilidad de que ocurra un éxito en el ensayo x por primera y única vez

p = probabilidad de éxito

q = probabilidad de fracaso

III.5. Distribución de Probabilidad Geométrica

Resolviendo el problema de ejemplo;

$x = 8$ lanzamientos necesarios para que aparezca por primera vez una águila

$p = 2/3$ probabilidad de que aparezca una águila

$q = 1/3$ probabilidad de que aparezca un sello

$p(x=8) = (1/3)8-1(2/3)=0.0003048$

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

A. Definición. **Proceso de Poisson y la Distribución de Poisson.**

- Los experimentos que resultan en valores numéricos de una variable aleatoria X, misma que representa el número de resultados durante un intervalo de tiempo dado o en una región específica, se llaman experimentos de Poisson.
- En intervalo de tiempo dado puede ser de cualquier duración.
- La región específica puede ser un segmento de línea, un área, un volumen, o tal vez un pedazo de material

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

Un experimento de Poisson surge del **proceso de Poisson** y tiene las siguientes propiedades:

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o región específicos es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo disjunto de tiempo o región del espacio disjunto. De esta manera se dice que el proceso de Poisson no tiene memoria.
2. La probabilidad de que un resultado sencillo ocurra en un intervalo de tiempo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo o al tamaño de la región y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo o región.
3. La probabilidad de que más de un resultado ocurra en ese intervalo de tiempo tan corto o en esa región tan pequeña es despreciable.

El número X de resultados que ocurren en un experimento de Poisson se llama **variable aleatoria de Poisson** y su distribución de probabilidad recibe el nombre de **distribución de Poisson**.

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

Distribución de Poisson.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X, que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o en una región específica, es

$$p(x; p) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Donde:

e = 2.71828.....

λ = np que representa el número promedio de resultados por unidad de tiempo o región.

El parámetro λ se puede obtener de tres maneras, que son las siguientes:

1. Cuando se conocen **n** y **p**
2. Como valor término medio de la variable. Cuando se dice promedio, valor promedio, media o esperanza matemática.
3. Estimado a partir de la media de una muestra de valores observados de la variable.

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

La media, esperanza matemática, es:

$$\mathbf{E(x) = \mu = \lambda}$$

La varianza es:

$$\sigma^2 = \lambda$$

La desviación es:

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

Flujo elemental de sucesos

El flujo elemental de sucesos es aquel que posee las tres propiedades siguientes:

1. **Calidad de estacionario.** La propiedad de calidad de estacionario consiste en que la probabilidad de que ocurran x sucesos en cada intervalo de tiempo depende solamente del número x y de la duración t del intervalo de tiempo y no depende del comienzo de su cuenta. En otras palabras, la probabilidad de aparición de x sucesos en un intervalo de tiempo de duración t depende sólo de x y de t.
2. **Propiedad de "ausencia de efecto posteriori".** La propiedad de "ausencia de efecto posteriori" se caracteriza porque la probabilidad de que ocurran x sucesos en cualquier intervalo de tiempo no depende de que hayan ocurrido o no los sucesos en los instantes de tiempo que preceden al comienzo del intervalo considerado. En otras palabras, la prehistoria del flujo no influye en la probabilidad de que los sucesos ocurran en un futuro próximo.
3. **Propiedad de ordinario se llama *simple* o *elemental* (de Poisson).** La propiedad de ordinario se caracteriza por que la aparición de dos o más sucesos en un intervalo pequeño de tiempo es prácticamente imposible. En otras palabras, la probabilidad de que ocurra más de un suceso en un pequeño intervalo de tiempo es despreciable en comparación con la probabilidad de que ocurra solamente un suceso.

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

El promedio de sucesos que ocurren en una Unidad de tiempo se llama **intensidad del flujo λ.**

Si la intensidad constante del flujo λ es conocida, la probabilidad de que ocurran k sucesos de un flujo elemental en el tiempo t se determina por la fórmula de Poisson:

$$p(x;p)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!}$$

El flujo que posee la propiedad de carácter de **estacionario** se llama estacionario; en caso contrario, **no estacionario**.

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

Características:

En este tipo de experimentos los éxitos buscados son expresados por unidad de área, tiempo, pieza, etc, etc,:

- # de defectos de una tela por m2
- # de aviones que aterrizan en un aeropuerto por día, hora, minuto, etc, etc.
- # de bacterias por cm2 de cultivo
- # de llamadas telefónicas a un conmutador por hora, minuto, etc, etc.
- # de llegadas de embarcaciones a un puerto por día, mes, etc, etc.

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

Ejemplo:

Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día, ¿cuáles son las probabilidades de que reciba,

a) cuatro cheques sin fondo en un día dado,
b) 10 cheques sin fondos en cualquiera de dos días consecutivos?

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

Solución:

a)

x = variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en un día cualquiera = 0, 1, 2, 3, ..., etc, etc.

λ = 6 cheques sin fondo por día

e = 2.718

$$p(x = 4, \lambda = 6) = \frac{(6)^4 (2.718)^{-6}}{4\downarrow} =$$

$$= \frac{(1296)(0.00248)}{24} =$$

$$= 0.13392$$

III.6. Distribución de Probabilidad Poisson

b)

x= variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en dos días consecutivos = 0, 1, 2, 3, ..., etc., etc.

λ = 6 x 2 = 12 cheques sin fondo en promedio que llegan al banco en dos días consecutivos

Nota: λ siempre debe de estar en función de x siempre o dicho de otra forma, debe "hablar" de lo mismo que x.

$$p(x = 10, \lambda = 12) = \frac{(12)^{10}(2.718)^{-12}}{10!} =$$

$$= \frac{(6.1917364E10)(0.000006151)}{3628800} =$$

$$= 0.104953$$

III.7. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

- Se emplea para calcular la probabilidad de obtener determinado número de éxitos en un espacio muestral de n ensayos; pero a diferencia de la distribución binomial es que los datos de la muestra se extraen sin reemplazo en una población finita.
- Por esto es que el resultado de una observación depende o es afectado por el resultado de cualquier otra u otras observaciones anteriores.
- La distribución hipergeométrica se emplea para muestreos sin reemplazo de una población finita cuya probabilidad de ocurrencia cambia a lo largo del ensayo.
- Es especialmente útil en todos aquellos casos en los que se extraigan muestras o se realizan experiencias repetidas sin devolución del elemento extraído o sin retornar a la situación experimental inicial.

III.7. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

Modeliza , de hecho, situaciones en las que se repite un número determinado de veces una prueba dicotómica de manera que con cada sucesivo resultado se ve alterada la probabilidad de obtener en la siguiente prueba uno u otro resultado.

Es una distribución fundamental en el estudio de muestras pequeñas de poblaciones pequeñas y en el cálculo de probabilidades de, juegos de azar y tiene grandes aplicaciones en el control de calidad en otros procesos experimentales en los que no es posible retornar a la situación de partida.

III.7. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

La distribución hipergeométrica puede derivarse de un proceso experimental puro o de Bernouilli con las siguientes características:

- El proceso consta de n pruebas , separadas o separables de entre un conjunto de N pruebas posibles.
- Cada una de las pruebas puede dar únicamente dos resultados mutuamente excluyentes: A y no A.
- En la primera prueba las probabilidades son :P(A)= p y P(A)= q; con p+q=l.

Las probabilidades de obtener un resultado A y de obtener un resultado no A varían en las sucesivas pruebas, dependiendo de los resultados anteriores.

- (Derivación de la distribución) . Si estas circunstancias a leatorizamos de forma que la variable aleatoria X sea el número de resultados A obtenidos en n pruebas la distribución de X será una Hipergeométrica de parámetros N, n, p así X=>H(N, n, P)

III.7. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

Definición

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria hipergeométrica **X**, el número de éxitos en una muestra de tamaño **n** seleccionada de **N** posibles resultados, de los cuales **k** son considerados como éxitos y **N – k** como fracasos es:

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0,1,2 \cdots\cdots n$$

III.7. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

- La media es:

$$E(x) = \mu = \frac{nk}{N}$$

- La varianza es:

$$\sigma^2 = n\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{k}{N}\right)\left(1-\frac{k}{N}\right)$$

III.7. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

Ejemplo:

a)¿Cuál es la probabilidad de que una mesera se rehúse a servir bebidas alcohólicas únicamente a dos menores de edad si verifica aleatoriamente solo 5 identificaciones de entre 9 estudiantes, de los cuales 4 no tienen la edad suficiente?,

b) ¿Cúal es la probabilidad de que como máximo 2 de las identificaciones pertenezcan a menores de edad?

III.7. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

Solución:

a) N = 9 total de estudiantes

a = 4 estudiantes menores de edad

n = 5 identificaciones seleccionadas

x = variable que nos define el número de identificaciones que pertenecen a personas menores de edad

x = 0, 1, 2, 3 o 4 identificaciones de personas menores de edad

$$p(x=2, n=5) = \frac{{}_4C_2 * \quad {}_5C_3}{{}_9C_5} = \; = \frac{(3)(10)}{126} = 0.238095$$

III.7. Distribución de Probabilidad Hipergeométrica

b)

N = 9 total de estudiantes

a = 4 estudiantes menores de edad

n = 5 identificaciones seleccionadas

x = variable que nos define el número de identificaciones que pertenecen a personas menores de edad

x = 0, 1, 2, 3 o 4 identificaciones de personas menores de edad

$$p(x = 0,1,2; n = 5) = \frac{{}_4C_0 * {}_5C_5 + {}_4C_1 * {}_5C_4 + {}_4C_2 * {}_5C_3}{{}_9C_5} =$$

$$= \frac{(1)(1)+(4)(5)+(6)(10)}{126} =$$

$$= \frac{1+10+60}{126} = \frac{81}{126} = 0.64286$$