IV. Variables Aleatorias Continuas y sus Distribuciones de Probabilidad

Variable Aleatoria Continua

Definición

Se dice que una variable aleatoria X es continua si su conjunto de posibles valores es todo un intervalo (finito o infinito) de números reales.

Por ejemplo, una v.a. continua puede ser el tiempo de retraso con el que un alumno o un profesor llega al aula de clases ó también el peso o la estatura de los estudiantes de la FE.

La función de densidad de una variable aleatoria continua

La función f(x) es una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua X, definida sobre el conjunto de los números reales, sí:

1.- $f(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in R$

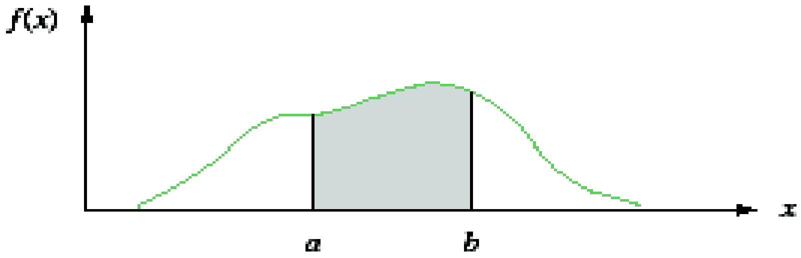
2.- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3.- $$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

$$= P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

La función de densidad de una variable aleatoria continua

- Esto es, la probabilidad de que X tome un valor en el intervalo $[a, b]$ es el área bajo la gráfica de la función de densidad, como lo ilustra la figura 4.1 La gráfica de $f(x)$, se conoce a veces como **curva de densidad**.



- Esto es, la probabilidad de que X tome un valor en el intervalo $[a, b]$ es el área bajo la gráfica de la función de densidad, como lo ilustra la figura. La gráfica de $f(x)$, se conoce a veces como **curva de densidad**.

La función de densidad de una variable aleatoria continua

Propiedades

Para una v.a. X, $f_X(x)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $f(x) \geq 0, \; \forall x$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

3. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$

Note además que $P(X = c) = 0$, para cualquier número real c.

La función de densidad de una variable aleatoria continua

- Ejemplo
- Un profesor de la UNAM nunca termina su clase antes del término de la hora, mas nunca se pasa de 2 minutos de ésta. Sea X : el tiempo que transcurre entre el término de la hora y el término efectivo de la clase. Suponga que la fdp de X viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & d.o.m. \end{cases}$$

La función de densidad de una variable aleatoria continua

1. Encuentre el valor de k.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la clase termine a menos de un minuto después del término de la hora?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la clase continúe entre 60 y 90 segundos después del término de la hora?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que la clase continúe por lo menos 90 segundos después del término de la hora?

La función de densidad de una variable aleatoria continua

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} kx^2\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx$$

$$= \frac{k}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}k$$

$$Como\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{8}{3}k = 1 \Rightarrow \underline{k = \frac{3}{8}|}$$

$$b)\ P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{1}{8}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

La función de densidad de una variable aleatoria continua

$$c)\, P(1 \leq X \leq 1{,}5) = \int_{1}^{1{,}5} \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{1}{8}x^3\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{19}{64} \approx 0{,}2969$$

$$d)\, P(X \geq 1{,}5) = \int_{1{,}5}^{2} \frac{3}{8}x^2 dx = 1 - \int_{0}^{1{,}5} \frac{3}{8}x^2 dx$$

$$= 1 - \frac{1}{8}x^3\Big|_{0}^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \approx 0{,}5781$$

Función de Distribución Acumulada

La distribución acumulada F(x) de una variable aleatoria continua X, con una función de densidad f(x) es:

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P(X} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$

para $-\infty \leq x \leq \infty$

De la definición de función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua se deducen las propiedades siguientes:

1.- $F(-\infty) = 0$

2.- $F(\infty) = 1$

3.- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

4.- $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Función de Distribución Acumulada

Uso de la función de densidad acumulada para calcular probabilidades

Sea X una v.a. continua con fdp f(x) y fda F(x). Entonces para cualquier número a,

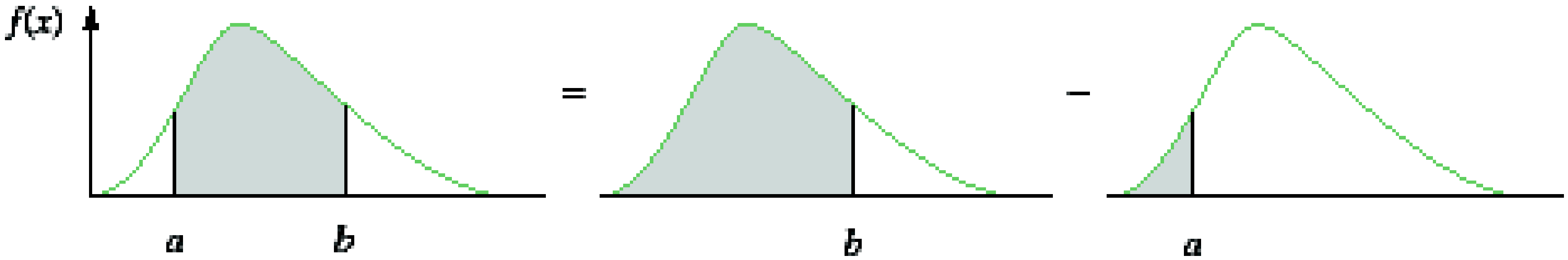
$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

y para dos números reales a y b cualesquiera, tales que a < b,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Función de Distribución Acumulada

Se ilustra el cálculo de probabilidades entre a y b como una diferencia entre las probabilidades acumuladas en la fda ("áreas").



Cálculo de $P\left(a \leq X \leq b\right)$ a partir de las probabilidades acumuladas.

Esperanza Matemática

Esperanza Matemática

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x). Se llama esperanza matemática o valor esperado, valor medio o media de X al número real.

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

Significado de la esperanza

Como valor medio teórico de todos los valores que puede tomar la variable. Representa una medida de centralización.

Esperanza Matemática

Ejemplo: La distribución de la cantidad de grava (en toneladas) vendida a una empresa en particular proveedora de materiales para la construcción, en una semana dada, es una v.a. X continua con fdp:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1 - x^2\right) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & de\ otra\ manera \end{cases}$$

¿Cuántas toneladas esperarías que se vendan durante esa semana?

Esperanza Matemática

Solución:

Por definición tenemos:

$$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X\left(x\right)dx=\int_{0}^{1} x\cdot \tfrac{3}{2}\left(1-x^2\right)dx=\frac{3}{8}=0,375$$

Lo cual significa que esperaríamos que se vendieran 0,375 [Ton] ó 375 [kg] de grava a la empresa proveedora de materiales para la construcción.

Esperanza Matemática

Valor esperado de una función

Si la v.a. continua X tiene una fdp f(x), entonces el valor esperado de cualquier función h(X) es:

$$E[h(X)] = \mu_{h(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

Varianza

Definición

Medida del cuadrado de la distancia promedio entre la media y cada elemento de la población.

Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad f(x) y media μ. La varianza de X es calculada por medio de:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Desviación estándar

Definición

1. Es una medida de dispersión de la misma dimensión física de la variable y que se indica por la letra σ.
2. Raíz cuadrada positiva de la varianza; una medida de la dispersión, expresada en las mismas unidades que los datos originales y no en las unidades cuadradas de la varianza.

La **desviación estándar (DE)** de X, denotada por σ_X , es:

$$\sigma_x = \sqrt{\alpha_x^2} = \sqrt{V(X)}$$

IV.1. La distribución Uniforme

Definición

Una variable aleatoria que toma valores en un intervalo [a, b].

Diremos que $X \in U(a, b)$ si su **función de densidad** está dada por:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{sí } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

IV.1. La distribución Uniforme

- Es una función de densidad de probabilidad:

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

Su función de distribución acumulada es:

$$f(x)\begin{cases} 0 & \text{sí } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{sí } a \le x \le b \\ 1 & \text{sí } x > b \end{cases}$$

Su Valor Esperado, la media:

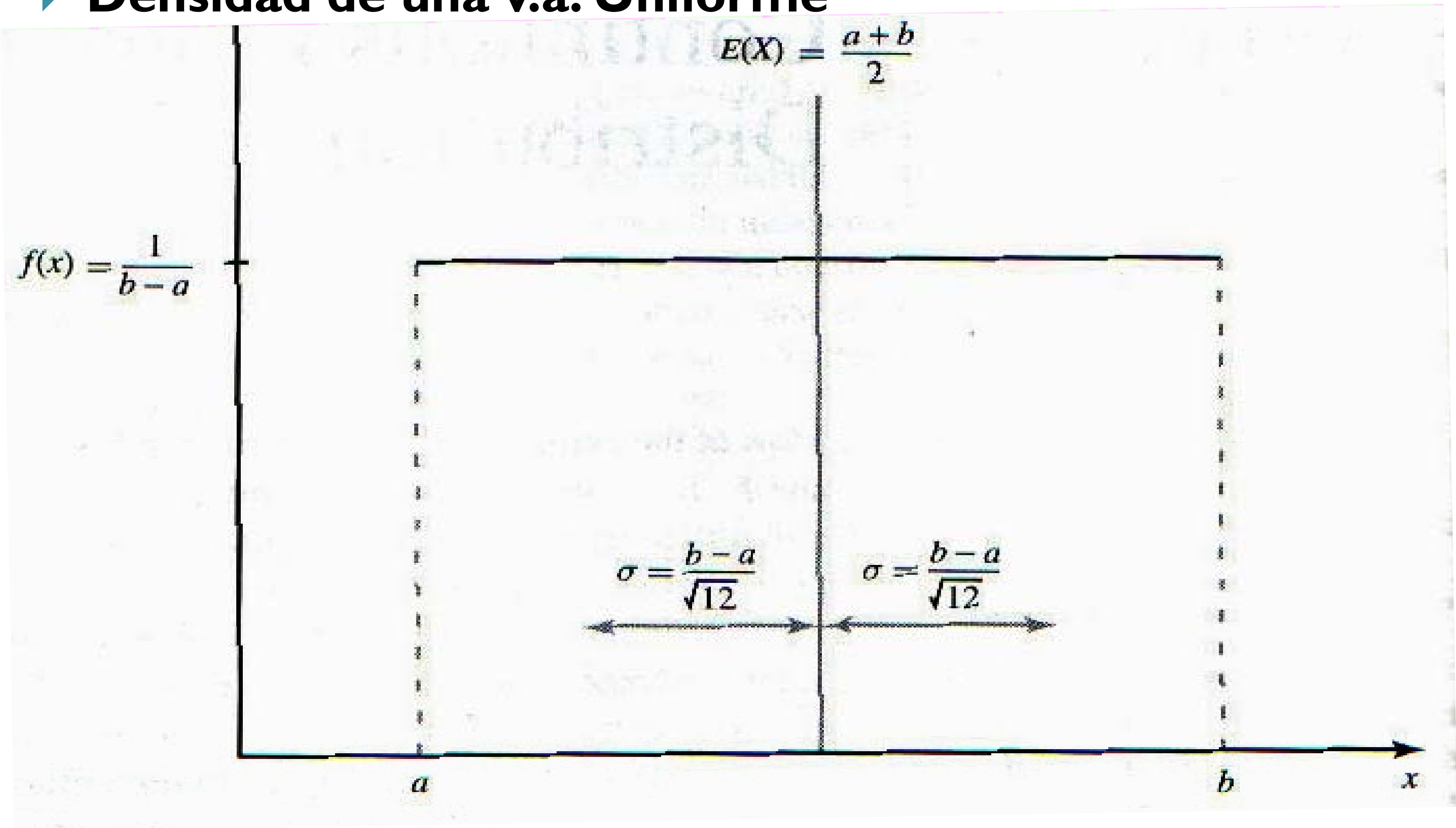
$$\mu = E[x] = \frac{b+a}{2}$$

La varianza es:

$$\mathrm{Var(x)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

IV.1. La distribución Uniforme

- **Densidad de una v.a. Uniforme**



IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

Definición

Una variable aleatoria X tiene una distribución exponencial y se denomina variable aleatoria exponencial continua si y sólo si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{sí } x > 0 \\ 0 \; en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Donde:

$$\lambda = \frac{1}{E[X]}$$

Note que el parámetro $\lambda > 0$, es exactamente el mismo que el estudiado en un proceso Poisson, por lo cual equivale a la **tasa del proceso**, es decir, al número promedio de ocurrencias por unidad (de tiempo, de longitud, de área, etc.)

IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

Es una función de densidad de probabilidad ya que cumple con lo siguiente:

1.- f(x) ≥ 0

Lo cumple por ser una función exponencial

2.- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Demostración:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^{b} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Integral que se resuelve por cambio de variable

IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

Sea: $$t = e^{-\lambda x}$$

$$\frac{dt}{dx} = -\lambda e^{-\lambda x}$$

$$dt = -\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Entonces: $$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\lambda x}(\lambda)dx = -\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\lambda x}(-\lambda)dx$$

Realizando el cambio de variable

$$-\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{t}\,dt = -\lim_{b\to\infty}\left(e^{t}\right)\Big|_0^b$$

Sustituyendo: $t = e^{-\lambda x}$ $$= -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\lambda x}}\right)\Bigg|_0^b$$

IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

Evaluando la integral:

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\lambda b}}\right) - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\lambda(0)}}\right) \right] = -\left[0 - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{0}}\right) \right]$$

$$= -\left[0 - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1}\right) \right] = -\left[-\lim_{b\to\infty}(1) \right] = \lim_{b\to\infty}(1) = 1$$

Lo cual queda demostrado.

IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

Función de distribución:

Demostración: $$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$$

La integral se resuelve por cambio de variable:

Sea:

$$w = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{dw}{dx} = -\lambda e^{-\lambda t}$$

$$dw = -\lambda e^{-\lambda t} dt$$

IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

Entonces:

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$F(x)=\int_0^x e^{-\lambda t}(\lambda)dt=-\int_0^x e^{-\lambda t}(-\lambda)dt$$

Realizando el cambio de variable:

$$F(x)=-\int_0^x e^{-\lambda t}(-\lambda)dt$$

$$F(x)=-\int_0^x e^{w}\,dw=-e^{w}\Big|_0^x$$

IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

- Evaluando la integral:

$$F(x) = -e^{w}\Big|_{0}^{x}$$

$$F(x) = -e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x}$$

$$F(x) = -\left[e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(0)}\right]$$

$$F(x) = -\left[e^{-\lambda x} - e^{0}\right]$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Por lo tanto la función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{sí } x \geq 0 \\ 0 & \text{sí } x < 0 \end{cases}$$

IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

La media y la varianza de la distribución exponencial son:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Respectivamente.

IV.2. Distribución de Probabilidad Exponencial

Propiedad de la "pérdida de memoria" de la distribución exponencial.

1. La distribución exponencial carece de memoria, es decir:

$$P\left(X > x + \frac{t}{X} > x\right) = P(X > t)$$

2. La distribución exponencial es la generalización al caso continuo de la distribución Geométrica.
3. La distribución exponencial aparece, en ocasiones, caracterizada utilizando como parámetro la media,

$$E(x) = \mu = \frac{1}{\lambda}$$

4. La distribución exponencial se caracteriza por tener una razón de fallo constante; la probabilidad de fallar en cualquier intervalo no depende de la vida anterior. Es, por lo tanto, adecuada para describir la aparición de fallos al azar. La razón de fallo viene dada por:

$$h(t) = \lambda.$$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

- El 12 de noviembre de 1733, Abraham DeMoivre desarrolló la ecuación matemática de la curva normal. De igual manera proporcionó una base sobre la cual se fundamenta una gran parte de la teoría de la estadística inductiva.
- A la distribución normal se le llama también **Distribución Gaussiana** en honor a Karl Friedrich Gauss.

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

Definición

Una variable aleatoria continua X tiene una distribución normal con parámetros μ y σ^2 , siendo μ un número real cualquiera y $\sigma > 0$, siendo su función de densidad de probabilidad de la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Con:

$-\infty < x < \infty$

$-\infty < \mu < \infty$

$\sigma > 0$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

Para ser una función de densidad de probabilidad debe de satisfacer las siguientes condiciones.

1. Que f(x) ≥ 0 para toda x que pertenece a los números reales.

   Que por ser una función exponencial lo cumple.

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

Propiedades.

1. Es unimodal.
2. La moda, mediana y moda poseen el mismo valor.
3. El dominio de f(x) son todos los números reales y su imagen está contenida en los reales positivos.
4. Es simétrica respecto de la recta $x - \mu$.

   Esto se debe a que:

   $$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$
5. Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$

   En efecto $y = 0$ es una asíntota horizontal, ya que:

   $$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

6. Alcanza un máximo absoluto en el punto:

$$\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)$$

Demostración

Sea:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

Derivando con respecto a μ.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left(-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}(-1)\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{2(x-\mu)}{\sigma^2}\right)$$

Igualando a cero:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{2(x-\mu)}{\sigma^2}\right)=0$$

De donde resulta:

$$x-\mu=0$$

$$x=\mu$$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

Obteniendo la segunda derivada:

$$f''(x) = f(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) + f(x)\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

$$f''(x) = f(x)\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right) + f(x)\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

$$f''(x) = f(x)\left[\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right) - \frac{1}{\sigma^2}\right]$$

$$f''(x) = f(x)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\left[\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) - 1\right]$$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

De donde resulta:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^2}$$

Entonces:

$$f(\mu) < 0$$

Y como:

$$x = \mu$$

Por lo tanto:

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Lo que prueba que el máximo se encuentra en:

$$\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{2\mu}\sigma}\right)$$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

7. Es creciente en el intervalo $(-\infty, \mu)$ y decreciente en (μ, ∞):

Si $x < \mu$, es $f'(x) > 0$, entonces la función es creciente

Si $x > \mu$, es $f'(x) < 0$, entonces la función es decreciente

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

8. Posee dos puntos de inflexión en:

$$x = \mu - \sigma$$

$$x = \mu + \sigma$$

Considerando la segunda derivada, la obtenida en el punto seis, e igualando a cero:

$$f(x)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 1\right] = 0$$

Despejando:

$$\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = 1$$

De donde resulta: $(x - \mu)^2 = \sigma^2$

$$x - \mu = \sigma \qquad y \qquad x - \mu = -\sigma$$

Por lo tanto:

$$x = \sigma + \mu \qquad y \qquad x = \mu - \sigma$$

IV.3. Distribución de Probabilidad Normal

9. Los parámetros μ y σ^2 son la media y la varianza respectivamente.

IV.3.1. Distribución Normal Tipificada

Teorema.

Si X tiene una distribución normal con la media y la desviación estándar, entonces:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Donde:

X es la variable de interés.

μ: es la media.

σ: es la desviación estándar

Z: es el número de desviaciones estándar de X respecto a la media de esta distribución.

La distribución normal estándar tiene media cero y varianza 1, y se denota como N(0,1).

IV.3.1. Distribución Normal Tipificada

Propiedades.

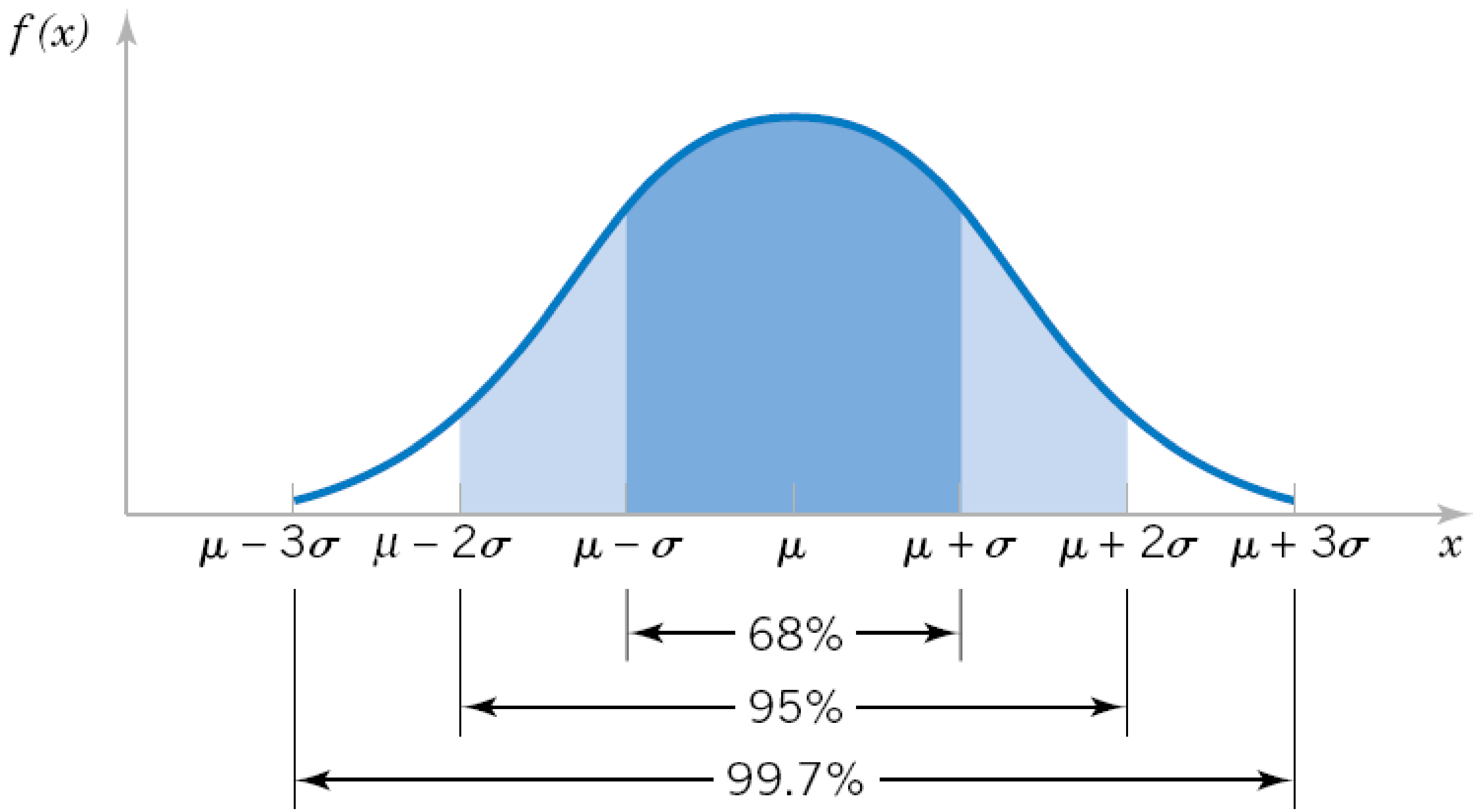
1. Su dominio son todos los números reales y su imagen son los números reales positivos.
2. Es simétrica respecto al eje de ordenadas.
3. Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
4. Alcanza un máximo absoluto en el punto $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$.
5. Es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.
6. Posee dos puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$, respectivamente.

IV.3.1. Distribución Normal Tipificada

Áreas de la normal:

1. Aproximadamente el 68% de todos los valores se encuentran dentro de una desviación estándar.
2. Aproximadamente el 95.5% de todos los valores se encuentran dentro de dos desviaciones estándar.
3. Aproximadamente el 99.7% de todos los valores se encuentran dentro de tres desviaciones estándar.

IV.3.1. Distribución Normal Tipificada



Probabilidades asociadas con una distribución normal

Ejemplos de distribución normal

Ejemplo 1

El tiempo que tarda un automovilista en reaccionar a las luces de freno traseras de otro vehículo al desacelerar, es crítico para ayudar a evitar una colisión.

Suponga que esta variable se puede modelar como una distribución normal con media de 1,25 segundos y desviación estándar de 0,46 segundos.

¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de reacción se encuentre 1 y 1,75 segundos?

Ejemplos de distribución normal

- Solución:

$$P(1 \leq x \leq 1{,}75) =$$

$$= P\left(\frac{1 - 1{,}25}{0{,}46} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{1{,}75 - 1{,}25}{0{,}46}\right)$$

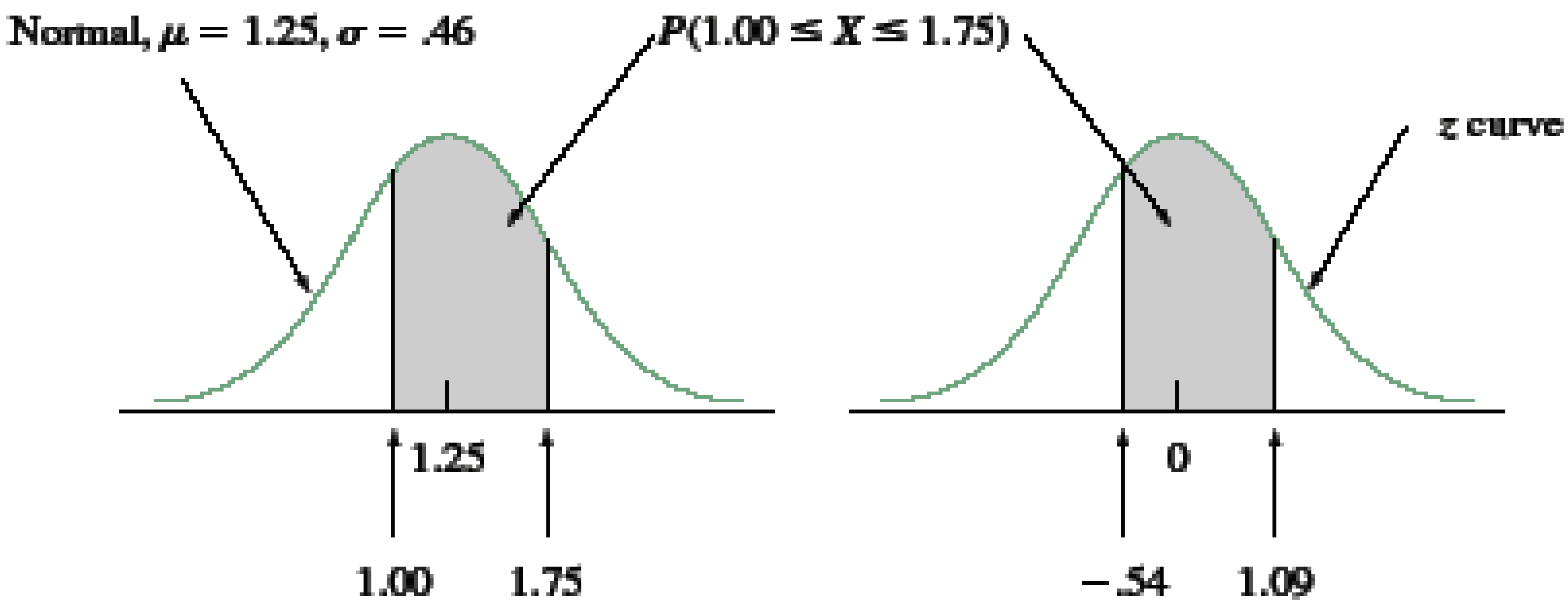
$$= P(-0{,}54 \leq Z \leq 1{,}09)$$

$$= 0{,}70540 - (1 - 0{,}86214)$$

$$= 0{,}70540 - 0{,}13786 = 0{,}56754$$

Ejemplos de distribución normal

A continuación se muestra el cálculo de esta probabilidad en forma gráfica, mostrando la equivalencia en el área entre la distribución normal y la estándar



Ejemplos de distribución normal

Ejemplo 2

En un quiosco de periódicos se supone que el número de ventas diarias se distribuye normalmente con media 30 y varianza 2. Determinar:

a) Probabilidad de que en un día se vendan entre 13 y 31 periódicos
b) Determinar el máximo número de periódicos que se venden en el 90% de las ocasiones

Ejemplos de distribución normal

- a) X ~ N(30, 2)

$$P(13 \le x \le 31) = P\left(\frac{12-30}{\sqrt{2}} \le z \le \frac{31-30}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= P(-12{,}02 \le z \le 0{,}07) =$$

$$= P(z \le 0{,}707 - P(z \le -12{,}02) \;= 0{,}7580$$

b) P (X ≤ a) = 0,90

$$\mathrm{P}(\mathrm{z} \le \frac{a-30}{\sqrt{2}}) = 0{,}90 \text{ (tablas)}$$

$$\frac{a-30}{\sqrt{2}} = 1{,}28$$

a = 31,81 periódicos

Ejemplos de distribución normal

Ejemplo 3.

Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg. Calcula la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:

a) Más de 61 kg.
b) Entre 63 y 69 kg.
c) Menos de 70 kg.
d) Más de 75 kg

Ejemplos de distribución normal

SOLUCIÓN:

X ~ N (65, 8)

a) $P(x > 61) = P\left(z > \frac{61-65}{8}\right) = P(z > -0{,}5) =$
$P(z < 0{,}5) = 0{,}6915$

b) $P(63 < x < 69) = P(-0{,}25 < z < 0{,}5) = 0{,}2902$

c) $P(x > 70) = P(z < 0{,}625) = 0.7357$

d) $P(x > 75) = P(z > 75) = P(z > 1{,}25) = 1 -$
$p(z \leq 1{,}25) = 0{,}1056$

Ejemplos de distribución normal

Ejercicio

En un estudio estadístico sobre la altura de los españoles y de los ingleses. Se han obtenido los siguientes datos:

Nacionalidad	**Españoles**	**Ingleses**
Media	170.2	175.4
Desviación típica	6.4	5.9

a) ¿Quién es más alto en su país, un español que mide 177 cm o un inglés que mide 181 cm?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un español mida más de 180 cm?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un ingles mida entre 160 y 170 cm?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un español sea más alto que un inglés?

Ejemplos de distribución normal

Apéndice

Distribución de Probabilidad Normal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Demostración

Sea:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Como:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Estableciendo la siguiente igualdad:

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Apéndice

Derivando:

$$dt = \frac{1}{\sigma} dx$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma} dx$$

Por lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Considerando I^2:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

Apéndice

Por lo que ahora tenemos una integral doble de la siguiente forma:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(s^2+t^2\right)}{2}} dsdt$$

De donde resulta:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(s^2+t^2\right)}{2}} dsdt$$

Apéndice

Realizando un cambio a coordenadas polares.

Sea:

$$s = r \cos \alpha$$

Y

$$t = r \operatorname{sen} \alpha$$

Por lo que el área ds y dt se transforma en rdrd α, y los nuevos intervalos son:

$$-\infty < s < \infty \quad \text{y} \quad -\infty < t < \infty$$

$$0 < r < \infty \quad \text{y} \quad 0 < \alpha < 2\pi$$

Apéndice

Entonces

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\left(r^2 sen^2\alpha + r^2\cos^2\alpha\right)}{2}} r dr d\alpha$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2\left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{2}} r dr d\alpha$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2(1)}{2}} r dr d\alpha$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\alpha$$

Apéndice

Resolviendo:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} rdr$$

Por cambio de variable

Sea:

$$w = -\frac{r^2}{2}$$

$$dw = -r$$

$$dw = -rdr$$

La integral resultante es:

$$I^2 = (-)\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}(-1)rdr$$

Apéndice

Por lo que:

$$(-)\int_0^{\infty} e^{w}\,dw = \lim_{b\to\infty}\int_0^{\infty} e^{w}\,dw$$

$$-\lim_{b\to\infty} e^{w}\Big|_0^{\infty} = -\lim_{b\to\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty}$$

Sustituyendo:

$$-\left[\lim_{b\to\infty} e^{-\frac{b^2}{2}} - \lim_{b\to\infty} e^{-\frac{o^2}{2}}\right] = -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{b^2}{2}}} - \lim_{b\to\infty} 1\right] = -[0-1] = 1$$

Apéndice

Entonces:

$$\int_0^{2\pi} 1 d\alpha = \alpha \Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

Por lo tanto:

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}[2\pi] = 1$$

I = 1

Lo cual queda demostrado.