

**FORO DE DIAGNÓSTICO PARA PREPARAR LA REFORMA CURRICULAR DE LA LICENCIATURA
ESCOLARIZADA DE LA FACULTAD DE ECONOMÍA DE LA UNAM**

27 de febrero al 2 de marzo de 2012

Tema: 2. El estado actual de la ciencia económica y la enseñanza de la disciplina

Sobre la enseñanza de las matemáticas para economistas

Martín PuchetAnyul¹

Ponencia que se somete a la:

Comisión de Planes y Programas de Estudio del H. Consejo Técnico

¹Profesor de carrera titular C (definitivo) de Métodos Cuantitativos, Facultad de Economía, UNAM.

“Hay que aclarar que no considero el enfoque matemático o el análisis matemático en economía como un ‘problema técnico’. Las matemáticas NO son el ‘instrumental’ técnico del economista; ésta es una visión netamente tecnócrata. El problema va bastante más allá (...)”

Uribe (1981), pp. 2-3.

En estas páginas se regresa otra vez al trillado tema del título. Pero ahora se lo hace ante el reto de la formación insuficiente de los estudiantes y egresados de la licenciatura escolarizada de la Facultad de Economía de la UNAM en materia de matemáticas y frente a las dificultades de concepción de este asunto que promueve la crisis económica global.

Se plantean brevemente las características de la formación previa de los estudiantes (apartado I), y de los economistas de la corriente principal (apartado II) para luego enumerar las dificultades que la crisis global impone al problema de qué enseñar de matemáticas a los economistas y de cómo hacerlo (apartado III). A partir de estos antecedentes se responde a la pregunta de qué papel deben cumplir las matemáticas en la formación de los economistas (apartado IV). Hasta aquí no hay ninguna conexión entre puntos de las materias de economía que se enseñan en la Facultad y temas de matemáticas.

Este planteamiento inicial está hecho para tomar en cuenta que conocimientos, recursos y capacidades tienen, genéricamente, quienes entran a la carrera, cuáles son los que tienen los egresados en el marco de la corriente principal que constituyen los principales competidores para una escuela no convencional y en qué circunstancias se produce actualmente la formación de los economistas.

A continuación se ponen ejemplos de puntos clave de la economía descriptiva, la micro y la macroeconomía y la econometría que se enseñan habitualmente y que están sobre el “filo de la navaja” entre versiones simples que requieren matemáticas estándar y versiones levemente modificadas que necesitan matemáticas más complicadas para obtener soluciones (apartado V).

A partir de las características enunciadas de la formación de los economistas y de los puntos clave presentados se extrae una lista de temas que deben importar en la enseñanza de las matemáticas para economistas (apartado VI). El último apartado delinea una propuesta que integra, a grandes trazos, la introducción de las matemáticas para la economía que comprende las bases, los fundamentos matemáticos de los métodos principales y los métodos matemáticos principales de la economía que se conectan con la lista de temas derivados previamente (apartado VII).

I. Características de la formación previa de los estudiantes

Las siguientes son, de manera muy sintética, las características que ostenta la formación de los estudiantes que ingresan a la carrera de economía.

Cobertura temática: álgebra elemental, geometría analítica, cálculo combinatorio y nociones de probabilidad, y cálculo diferencial.

Con distinta extensión, que se hace relativamente menor a medida que se pasa de una rama a otra, los cursos que han tomado los estudiantes cubren los conocimientos de cada una de ellas en

versiones que ponen el acento más en las fórmulas y sus relaciones que en la deducción y, mucho menos, en las conexiones que conducen de problemas a sus planteamientos y de allí a las respectivas soluciones.

Profundidad del conocimiento: enunciación mediante fórmulas y representaciones simples e inconexas, escasas parcelas donde se pasa de hipótesis a conclusiones mediante pasos deductivos, demostraciones sólo en casos excepcionales, uso de conceptos particulares, prácticamente ninguna estructuración de esas ramas mediante conceptos generales y comunes provenientes de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y la topología.

II. Características de la formación matemática de los economistas de la corriente principal

Un referente común de la formación terminal de los economistas es la que poseen aquellos que se forman en la corriente principal. Aunque nuestros egresados, por lo general, no pertenecen a ese contingente numeroso (entre dos tercios y 17/20) de la profesión es importante tenerlo como referente de cualquier diálogo en el seno de la disciplina y de las actividades profesionales.

Las siguientes son también de forma sumamente resumida las características formativas que muestran los economistas de la corriente principal.

Cobertura: teoría de la optimización estática y dinámica, teoría de juegos no cooperativos con distintos conjuntos de información, cálculo de probabilidad aplicado a la optimización y a la teoría de juegos.

Se concentra en técnicas y métodos útiles para representar y modelar el comportamiento individual y los intercambios resultantes en distintas estructuras de mercado entre las cuales la competencia perfecta juega un papel de referencia ideal.

Profundidad del manejo matemático: habilidad para plantear problemas donde a partir de ciertos condicionantes del comportamiento individual es posible formularlos como casos de optimización y juegos; destreza para identificar problemas donde se requiera la simulación numérica porque se carece de versiones analíticas al introducir no linealidades o al incorporar distribuciones de probabilidad de muy difícil solución explícita; alta dependencia del conocimiento matemático respecto del método que se basa en que una situación económica es una interacción de agentes optimizadores sujetos a diferentes clases de restricciones interconectadas.

III. Dificultades de concepción de problemas relevantes que plantea la crisis global

La lista de asuntos que se enumera a continuación pretende mostrar, de manera general, que existen aspectos y niveles de la actividad económica que desafían a las teorías de la corriente principal, los fenómenos que enfoca el marco descriptivo habitual, las formas de modelación matemática vigentes o las conceptualizaciones de rasgos principales de los procesos económicos.

- Asuntos que requieren explicaciones diferentes desde el punto de vista teórico.

Se trata de hechos y relaciones económicas cuyas evoluciones no son concebibles, por lo menos de manera sencilla, poniendo como referencia a la competencia perfecta (o a los mercados eficientes) y cuyas situaciones resultantes no se pueden plantear sólo como interacciones de agentes optimizadores. Son asuntos donde se presentan carencias y dificultades de la corriente principal para darles un tratamiento adecuado. Esas falencias han despertado una crítica desde distintos puntos de vista que cuestionan muchas vertientes altamente matematizadas de la corriente principal. No obstante, debe comprenderse que el punto medular de las críticas son los supuestos teóricos y no los aspectos periféricos: métodos, técnicas y procedimientos matemáticos que se usan para plantearlos distintos asuntos. Es común también la crítica que atribuye las carencias de poder explicativo o de realismo de los supuestos su planteamiento matemático.

Son referentes de estos asuntos las interpretaciones de los mercados de instrumentos financieros como mercados eficientes al margen de interferencias provenientes de las características de las estructuras de mercado donde interactúan las organizaciones financieras y las formas en que se comunican las señales informativas.

- Asuntos nuevos donde hay interacciones entre agentes a distintos niveles, en que aparecen situaciones y propiedades emergentes en un nivel que trascienden y hasta gobiernan lo que ocurre en otro o en los que se imponen restricciones surgidas en unos niveles sobre comportamientos que transcurren en otros.

Se trata de procesos, hechos y relaciones económicas donde surge y se impone la complejidad de la actividad económica y para los cuales se requieren enfoques provenientes de las “disciplinas de lo complejo” y donde no hay una gran dotación de expertos que tengan entrenamiento. Por ello se producen distanciamientos y opacidades conceptuales que conducen a la negación, por los economistas más convencionales, de muchos desarrollos valiosos.

Son referentes de estos asuntos las innovaciones financieras que pretenden cubrir riesgos en distintas direcciones y donde proveedores y demandantes se ubican en distintos niveles de la actividad financiera – desde el negocio bancario hasta el intercambio de derivados – tomando decisiones en cada nivel que responden a estrategias que consideran objetivos multinivel y entrecruzan acciones en diferentes niveles.

- Asuntos donde se entrecruzan presiones provenientes de marcos regulatorios con decisiones que consideran información de señales actuales y esperadas emitidas por agentes ubicados en diferentes niveles de interacción.

Se trata de la complejidad proveniente de las conexiones entre racionalidades de agentes situados a distintos niveles y las instituciones respectivas.

Son referentes de estos asuntos los mercados que se regulan mediante instituciones diseñadas para tomar en cuenta señales cuyos tiempos se traslapan y donde los poderes de las organizaciones financieras condicionan las decisiones de gobiernos y conglomerados productivos.

En los asuntos enumerados hay que distinguir cuáles son los tipos de dificultades que enfrenta su planteamiento:

- a) teóricas: cómo advertir que los *modelos explicativos* propuestos son inadecuados para los hechos que condujeron a la crisis;
- b) ontológicas: cómo concebir fenómenos económicos que dan lugar a *hechos nuevos* que no están conceptualizados en los marcos descriptivos habituales;
- c) metodológicas: cómo diferenciar que existen modelos explicativos que captan niveles de hechos y relaciones cuando se requeriría, además, conectar modelos de diferentes niveles mediante *hiper modelos*
- d) conceptuales: cómo percibir que las *decisiones* se toman en *marcos de diversos grados de condicionalidad*: objetivos/instrumentos, regulaciones, instituciones, poderes.

Según los tipos de dificultades se requieren diferentes recursos intelectuales y éstos condicionan los métodos, técnicas y procedimientos matemáticos que se necesitan.

IV. *Papel de las matemáticas en el aprendizaje de los economistas*

Las características formativas de quienes entran a la licenciatura, aquellas de quienes han salido del proceso de formación de los economistas dentro de la corriente principal y las dificultades de diversa índole que ha promovido la emergencia de la crisis global condicionan la respuesta a la pregunta siguiente: ¿qué papel deben jugar las matemáticas en el aprendizaje de los economistas?

Las matemáticas deben convertirse en un recurso para la investigación en economía más que en una sintaxis condicionada por la expresión de diversas teorías. Ello supone que deben estar a disposición para hacer tareas de consecución de conocimientos en una disciplina empírica donde se requiere conceptualizar para describir y explicar, modelar para replicar, medir en distintos niveles. Por lo tanto habría que aprender las matemáticas necesarias según asuntos y problemas. Ellas deben servir para caracterizar temas diversos, plantear preguntas y dar respuestas que surgen de fenómenos y acontecimientos que se expresan en procesos, hechos y relaciones económicos continuamente emergentes.

Parece conveniente entonces disponer de marcos conceptuales comprensivos, dispositivos útiles para demostraciones, y capacidades de planteamiento de problemas y de aprendizaje más que de grandes reservorios de conocimientos sumamente detallados. Ello conduce a una idea guía: conviene aprender las matemáticas que hagan posible comprender y estudiar más y más robustas ramas de las matemáticas, que hagan viable abarcar y aprehender conocimientos matemáticos nuevos. Es mejor invertir tiempo en conceptos y formas de estructurarlos demostrativamente que gastar horas en explicar fórmulas adquiridas y dar recursos útiles para aplicaciones cerradas.

V. *Ejemplos económicos cuestionan la importancia formativa de ideas matemáticas habitualmente enseñadas*

Los apartados anteriores sitúan el diagnóstico de la enseñanza de las matemáticas para economistas relativamente al margen de las materias de economía que se enseñan en la licenciatura. Los ejemplos económicos siguientes intentan mostrar qué versiones de los mismos que se enseñan en la economía descriptiva, en la micro o la macroeconomía y en la econometría recurren a planteamientos matemáticos simples que, sin embargo, son adyacentes a los que

requieren versiones formuladas mediante matemáticas más complicadas. Es decir, estos ejemplos están en el “filo de la navaja” entre versiones que requieren formulaciones basadas en matemáticas sencillas y otras sustentadas en recursos más refinados.

Muchas de estos ejemplos, con sus versiones estándar y sus versiones más complicadas, también pueden interpretarse como el tránsito de planteamientos adecuados a conceptos de la corriente principal y otros cercanos a vertientes de la economía no convencional.

Al mismo tiempo este hecho pone en evidencia la necesidad de una enseñanza de las matemáticas que reconozca como más importante dar marcos conceptuales comprensivos, construir dispositivos útiles para demostraciones y generar capacidades de planteamiento de problemas y de aprendizaje. Ello apunta en el mismo sentido que lo exige la situación actual compuesta por insuficiencias formativas y la emergencia de dificultades de diversa índole promovidas por la crisis global.

Ejemplo 1) En la economía descriptiva más elemental se plantea que el intercambio entre agentes residentes (r) y no residentes (nr) está dado por la siguiente tabla contable:

nr	r	nr	C_N	X	I_N	Y
			C_M	O	I_M	M
			S_N	S_M	O	S
			Y	M	I	

Convendría que se dispusiera de conceptos para comprender que en esta tabla coexisten:

- i) las matrices horizontal $\begin{pmatrix} C_N & C_M & I_N \\ C_M & O & I_M \end{pmatrix}$ y vertical $\begin{pmatrix} C_N & X \\ C_M & O \\ S_N & S_M \end{pmatrix}$
- ii) las matrices de proporciones $A = \begin{pmatrix} C_N^0 & X^0 \\ C_M^0 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^0 & 0 \\ 0 & M^0 \end{pmatrix}^{-1}$ y $E = \begin{pmatrix} Y^0 & 0 \\ 0 & M^0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_N^0 & X^0 \\ C_M^0 & O \end{pmatrix}$

donde el supra índice ⁰ indica que la transacción fue observada en el período 0 y que cuando $Y \neq Y^0$ y $M \neq M^0$ junto con $I \neq I^0$ y $S \neq S^0$ es posible plantear los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} Y \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_N \\ I_M \end{pmatrix} ; \quad (Y, M)' = (Y, M)' \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix};$$

$$(Y > 0 \wedge M \geq 0) \vee (Y \geq 0 \wedge M > 0)$$

y

$$A_a = \begin{pmatrix} C_N^0 & X^0 & I_N^0 \\ C_M^0 & 0 & I_M^0 \\ S_N^0 & S_M^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^0 & 0 & 0 \\ 0 & M^0 & 0 \\ 0 & 0 & S^0 \end{pmatrix}^{-1}; E_a = \begin{pmatrix} Y^0 & 0 & 0 \\ 0 & M^0 & 0 \\ 0 & 0 & S^0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_N^0 & X^0 & I_N^0 \\ C_M^0 & 0 & I_M^0 \\ S_N^0 & S_M^0 & 0 \end{pmatrix}$$

tal que

$$A_a \begin{pmatrix} Y \\ M \\ S \end{pmatrix} = 0; (Y \ M \ S)' E_a = 0; (Y, M, S) \geq 0 \ (\exists (Y, M, S)) Y \ \forall M \ \forall S > 0$$

iii) la función lineal $R: \begin{pmatrix} I_N \\ I_M \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} Y \\ M \end{pmatrix}$ con $R = (I - A)^{-1}$ proveniente de:

$$\begin{pmatrix} Y \\ M \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} Y \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_N \\ I_M \end{pmatrix} \therefore (I - A) \begin{pmatrix} Y \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_N \\ I_M \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} Y \\ M \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} I_N \\ I_M \end{pmatrix}$$

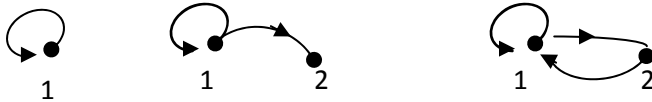
iv) el hecho de que R es el límite de la serie de Neuman: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n A^i$

v) la correspondencia entre las matrices respectivas, sus adyacencias y grafos

$$ady_1(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } a_{ij} > \alpha_1;$$

$$ady_2(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } a_{ij} > \alpha_2;$$

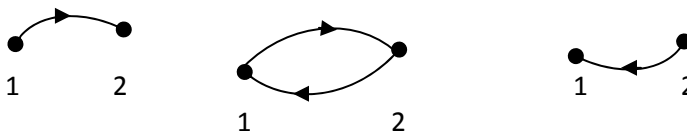
$$ady_3(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \text{ si } a_{ij} > \alpha_3$$



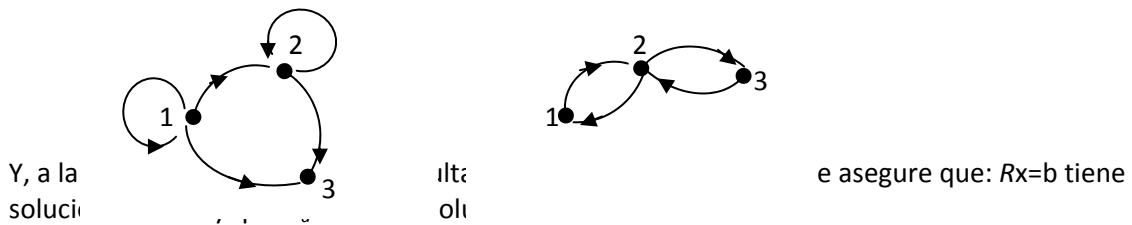
$$ady_{1'}(A) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } a_{ij} > \alpha_{1'};$$

$$ady_{2'}(A) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} \text{ si } a_{ij} > \alpha_{2'};$$

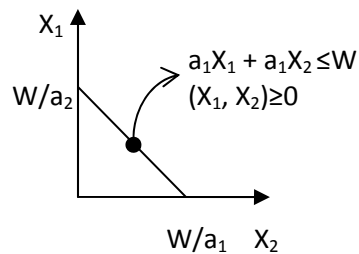
$$ady_{3'}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} \text{ si } a_{ij} > \alpha_{3'}$$



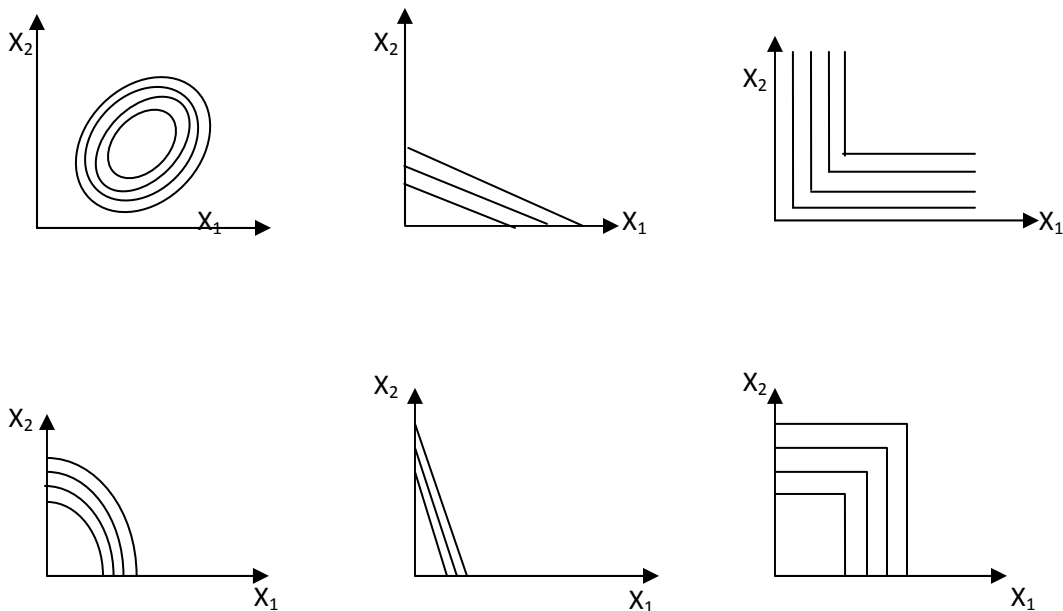
$$ady_1(A_a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a_{ij} > a_1 ; ady_2(A_a) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a_{ij} > a_2$$



Ejemplo 2) En la microeconomía más elemental se tiene que resolver un problema de optimización donde las opciones deben elegirse en la región factible:



Por lo general las curvas de nivel de la función objetivo: $f(X_1, X_2)$ son fronteras hacia el origen de conjuntos convexos. La solución por el método de Lagrange es el que se de manera habitual. No obstante, si las posibles curvas de nivel $f(X_1, X_2)=k$ tienen las siguientes formas no exentas de amplio sentido económico:



Se requiere transitar rápidamente hacia la programación matemática.

Ejemplo 3) También en la macroeconomía dinámica elemental junto con:

A) Modelo de Harrod

$$\left. \begin{array}{l} S_t = sY_{t-1} \\ I_t = k\Delta Y \\ S_t = I_t \end{array} \right\} \\ Y_t = \left(1 + \frac{s}{k}\right) Y_{t-1} \therefore Y_t^* = \left(1 + \frac{s}{k}\right)^t Y_0$$

donde S_t es el ahorro, I_t es la inversión, y Y_t es el ingreso de la economía con propensión a ahorrar s y razón incremental deseada capital – producto k ; escrito ahora en las desviaciones resulta en:

A') Modelo de Harrod alrededor de la trayectoria

$$y_t = Y_t - Y_t^* \\ y_t = \left(1 + \frac{s}{k}\right) y_{t-1} \quad y_t^* = \left(1 + \frac{s}{k}\right)^t y_0; \quad y_0 = 0 \text{ entonces } Y_t = Y_t^*$$

aparece el siguiente planteamiento de Goodwin escrito en el marco de la formulación de Hicks con una función de inversión con “techo”:

B) Modelo de Goodwin

$$k_1 \Delta Y \quad \text{si } \Delta Y < d = \frac{a}{k_1 - k_2}; \quad k_1 > 1 \\ I_t = \begin{cases} a + k_2 \Delta Y & \text{si } d \leq \Delta Y; \quad a > 0, \quad 0 < k_2 < 1 \end{cases}$$

$$Y_t = cY_{t-1} + I_t \quad 0 < c < 1$$

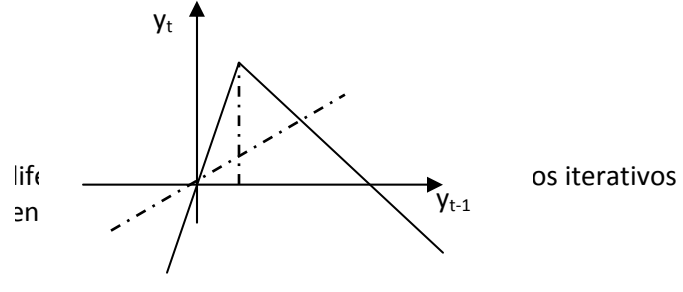
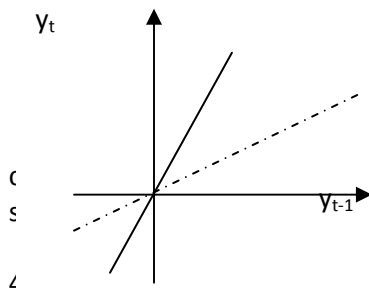
$$Y_t = \begin{cases} \frac{k_1 - c}{k_1 - 1} Y_{t-1}; \quad Y_t = \left(\frac{k_1 - c}{k_1 - 1}\right)^t Y_0 \\ \frac{c - k_2}{1 - k_2} Y_{t-1} + \frac{a}{1 - k_2}; \quad Y_t = \left(\frac{c - k_2}{1 - k_2}\right)^t Y_0 + \frac{a}{1 - k_2} \sum_{n=0}^{t-1} \left(\frac{c - k_2}{1 - k_2}\right)^n \end{cases}$$

que escrito otra vez en las desviaciones resulta en:

B') Modelo de Goodwin alrededor de la trayectoria

$$y_t = \begin{cases} \alpha y_{t-1} & \alpha = \frac{k_1 - c}{k_1 - 1} \\ \beta y_{t-1} + \gamma & \beta = \frac{c - k_2}{1 - k_2}, \quad \gamma = \frac{a}{1 - k_2} \end{cases}$$

En estos modelos contrastan los casos lineal (A') y no lineal (B') respectivamente graficados abajo



$$Y_t = \left(1 + \frac{s}{k}\right) Y_{t-1}$$

$$Y_t = \begin{cases} \frac{k_1 - c}{k_1 - 1} Y_{t-1} \\ \frac{c - k_2}{1 - k_2} Y_{t-1} + \frac{a}{1 - k_2} \end{cases}$$

mediante las series de tiempo del ingreso plantea importantes problemas econométricos. Entre ellos se debe de considerar el de la estacionariedad de los procesos estocásticos subyacentes y sus implicaciones para la estimación de procesos auto-regresivos como los planteados.

VI. Temas de matemáticas que importan

Ante estos ejemplos relevantes conviene sacar algunas lecciones sobre temas que aparecen con particular fuerza y que requieren formación en ramas matemáticas básicas y diversas.

Temas A. Extraídos de ejemplos relevantes

- 1) Álgebra lineal de matrices no negativas, con particular acento sobre las soluciones viables económicamente; papel de los sistemas de ecuaciones con distinto número de ecuaciones que de incógnitas; condiciones de solución basadas en matrices de diagonal dominante.
- 2) Teoría de grafos asociados a matrices con entradas entre 0 y 1 y con diagonal dominante (matrices markovianas).
- 3) Teoría de la optimización para casos que requieren métodos no lagrangeanos (óptimos no interiores y conjuntos factibles de fronteras no suaves).
- 4) Teoría de las ecuaciones en diferencias finitas no lineales y de los sistemas dinámicos basados en iteraciones.
- 5) Análisis econométrico de series de tiempo.

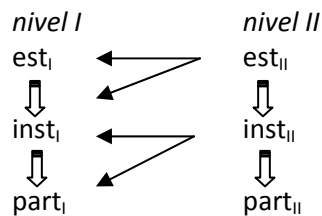
A estos temas promovidos por los ejemplos conviene adjuntar aquellos que son centrales para la corriente principal.

Temas B. Derivados de la formación de los economistas de la corriente principal

- 1) Elementos de topología para plantear y resolver problemas de existencia y estabilidad del equilibrio general que conducen a problemas más generales.
- 2) Conceptos de optimización y probabilidad que hacen posible plantear y resolver modelos de toma de decisiones en entornos estocásticos y de teoría de juegos.
- 3) Teoría de juegos
- 4) Métodos recursivos y simulación numérica para resolver problemas de optimización, decisiones y juegos.
- 5) Métodos estadísticos multivariados para enfocar problemas de decisión e interacción multi-agentes

Además de estos temas se deben agregar otros que surgen de los asuntos que ha promovido la crisis. Estos son aquellos relacionados con los siguientes puntos:

- a) En cada aspecto de la actividad económica hay por lo menos tres elementos constitutivos:
 - i) conductas de los participantes, ii) conjuntos de reglas (instituciones) que los participantes siguen como resultado de sus interacciones y iii) estructuras que condicionan, como lo hacen las instituciones, las acciones posibles sino que también determinan las reglas factibles.
- b) Para cada aspecto de la actividad económica hay por lo menos dos niveles donde están relacionados participantes, instituciones y estructuras de forma tal que:



y por lo tanto, *nivel I* \rightleftharpoons *nivel I*

- c) Cada nivel de un aspecto de la actividad económica cambia respecto a sus elementos participantes, instituciones y estructuras de manera tal que el condicionamiento puede variar por la precedencia; así

part_{It} *est_{It+1}* *inst_{It+2}*

cuando el condicionamiento es: $est_i \rightarrow inst_i \rightarrow part_i \rightarrow$

En concordancia con los puntos anteriores surgen otros temas.

Temas C. Obtenidos de asuntos que promueve la crisis global

- 1) Teoría de los sistemas dinámicos sinérgicos o complejos (Zhang y la serie del Santa Fe Institute, 1988, 1997, 2005)
- 2) Teoría de los sistemas dinámicos aplicados al control y regulación de la actividad económica (Kornai, Martos)
- 3) Teoría de los juegos evolutivos (Weibull, Gintis)

El núcleo de la cuestión no parece ser confrontar unos temas contra otros, unas ramas de las matemáticas contra otras sino proporcionar una formación que haga posible generar recursos y capacidades para aprender los tres subconjuntos. Este fue el mensaje de los grandes textos de matemáticas para la economía: de manera proverbial, el de Nikaido (1970), de manera menos radical, los de Takayama (1974, 1985, 1994), el de Murata (1977) y, posteriormente, los de De la Fuente (2000) y Carter (2001). Y antes lo habían sido la serie de textos para las ciencias sociales o del comportamiento basados en estructuras matemáticas finitas que hicieron Kemeny, Mirkill, Snell y Thompson desde la segunda mitad de los cincuenta. El nuevo texto de Accinelli (2011) recupera la visión de las estructuras matemáticas finitas y se ubica como un texto que contribuye a tender un puente entre dicho enfoque y el de los textos de matemáticas para la economía.

VII Bases, fundamentos y métodos matemáticos para la formación de los economistas

La formación se organiza en cuatro cursos que comprenden las *bases* de las matemáticas y los fundamentos de los métodos matemáticos para la economía. Luego siguen cursos sobre métodos que comprenden temas como los listados en A, B y C que pueden tener distintos grados de opcionalidad.

El temario del primer curso (fig. 1, I), desde el punto de visto didáctico, se basa en la idea de reorganizar el conocimiento de aritmética, geometría y álgebra elementales que tienen los estudiantes junto con las nociones adicionales que puedan tener de geometría analítica, cálculo diferencial, y probabilidad y estadística bajo un enfoque estructural que conecte conceptos y áreas de conocimiento.

“Los distintos “fundamentos” (de números, de geometría y álgebra) se podrían asociar a los conjuntos siguientes:

- (a) los reales con propiedades de orden, distancia y linealidad;
- (b) conjuntos ordenados y parcialmente ordenados(...);
- (c) espacios métricos (...);
- (d) espacios lineales (...).” (Michel Rojas, *Comunicación personal*).

La forma expositiva y la justificación de los temas más allá de lo que se presenta en clase es la siguiente. Por ejemplo, el tema de lógica de primer orden (LPO) se presenta y estructura según los puntos que se describen a continuación.

i) Se expone el tema desde *una motivación general*, por ejemplo, la necesidad de la lógica como una forma de simbolizar y formalizar una parcela del lenguaje ordinario: aquella de los enunciados apofánticos de primer orden.

ii) Se plantean conceptos clave a partir de *ilustraciones intuitivas* y, de manera rigurosa, se definen y estructuran, en el caso de la LPO se usan para construir los lenguajes formales de la lógica de enunciados, la lógica de predicados y las axiomáticas de la sintaxis y la semántica lógicas.

iii) Se abre un recuadro de *justificación meta-didáctica* para revelar por qué se parte de dónde se ha hecho; en el caso de la LPO se justifica porqué del lenguaje ordinario y por qué se eligen operaciones meta-lógicas como simbolizar y formalizar, se discuten aspectos de la axiomatización de la lógica clásica: deducción y deducción natural, sistemas formales y nociones de verdad, con el ánimo de cuestionar:

- a) puntos de partida inmanentes que admiten otros,
- b) la necesidad de operaciones meta-lógicas que no son imprescindibles si se hace lógica y
- c) los límites de la lógica clásica en términos de sus conceptos de consecuencia y verdad;

iv) Se introducen *ventanas retrospectivas* para plantear el papel del tema en el conjunto de los cursos y en ese curso en particular, por ejemplo, en el caso de la LPO el papel de comenzar por ella cuestionando:

- a) su posibilidad de servir de fundamento de las matemáticas
- b) su carácter de fuente privilegiada del razonamiento matemático

y afirmando:

- a) su función en las demostraciones por la vía de los recursos que prestan los esquemas lógicos y
- b) su capacidad de fundar la inferencia deductiva de la argumentación que subyace en la investigación y en los discursos científicos.

v) Se abren *ventanas prospectivas* hacia temas que por sí mismos aunque no se traten en ningún curso; en el caso de la LPO se presentan las lógicas no clásicas que pueden resultar útiles para hacer inferencias deductivas más allá de aquellas que se fundan en la lógica clásica y en las matemáticas y se señalan las relaciones entre lógicas no clásicas y matemáticas.

Los puntos sustanciales de cada tema son los enumerados i) y ii) y son los que se presentan en clase. Los *recuadros* están destinados a justificar el enfoque y las formas de abordaje ante otros profesores de los mismos cursos. Las ventanas hacia atrás y hacia adelante, están destinados a

mostrar a los investigadores el papel de las matemáticas en los métodos de la economía y a afirmar su importancia y sus límites. En particular, tratan de ubicar la relación que tienen, por ejemplo, las bases con:

- a) fundamentos matemáticos,
- b) métodos matemáticos,
- c) inferencias deductiva e inductiva y
- d) argumentación determinada y sub-determinada en la investigación y el discurso económicos.

El primer curso (fig. 1, I) requiere una exposición didáctica para pasar de las estructuras simples y más generales de la LPO y la teoría de conjuntos (TC) a la reconstrucción de las ramas elementales de las que se tiene, por lo general, información y conocimiento muy disímil.

Por lo general, la aritmética se conoce en relación a métodos de conteo sumamente simples (y muy poco en relación al cálculo combinatorio), operaciones con números enteros y fraccionarios y mucho menos respecto a las propiedades de los reales y los complejos.

Por su parte, la geometría se conoce sobre todo en el plano y casi nada en el espacio y la información se circunscribe a propiedades de ángulos (con poco manejo trigonométrico), áreas y perímetros y, mucho menos, de volúmenes.

Por lo que respecta al álgebra, su conocimiento está concentrado en las propiedades y operaciones con las expresiones enteras y racionales, y muchísimo menos con las irracionales y trascendentes; polinomios y ecuaciones junto con las clases de soluciones son escasamente conocidos.

Un punto principal es plantear de una manera axiomática los componentes de los fundamentos de las tres ramas e introducir las demostraciones de enunciados y teoremas de uso habitual; v.gr. propiedades de relaciones de equivalencia y orden, propiedades de las operaciones, teoremas de progresiones; teoremas de Tales y de Pitágoras, de la trigonometría y del coseno; teoremas de los polinomios. Esos resultados conocidos y menos dificultosos deben servir para frecuentar las prácticas demostrativas, verificar los alcances y limitaciones de la LPO y desarrollar la deducción más allá de los métodos de la LPO introduciendo en particular la inducción completa y muchos métodos directos.

Luego hay que usar estructuras simples para avanzar en la introducción de ramas basadas en otros entes. En particular las relaciones y transformaciones que caracterizan los puntos y sus coordenadas en la geometría analítica y la incorporación de líneas y figuras que aparecen en ella mediante ecuaciones e inecuaciones. También se deben caracterizar como aparecen puntos, segmentos y pesos en la teoría de grafos. Mostrar cómo funcionan en otros conjuntos, relaciones, funciones, operaciones y estructuras es lo fundamental. A la vez, la comparación de que existen formas muy distintas de construir estructuras con los mismos elementos (o componentes): puntos, segmentos y números en la geometría analítica y en la teoría de grafos, y también muchas formas de incorporar formulas y su satisfacción en ambas ramas elementales. Finalmente, las bases exponen la formación de las ramas que “generalizan” puntos y números mediante la introducción de la geometría analítica vectorial y el álgebra matricial.

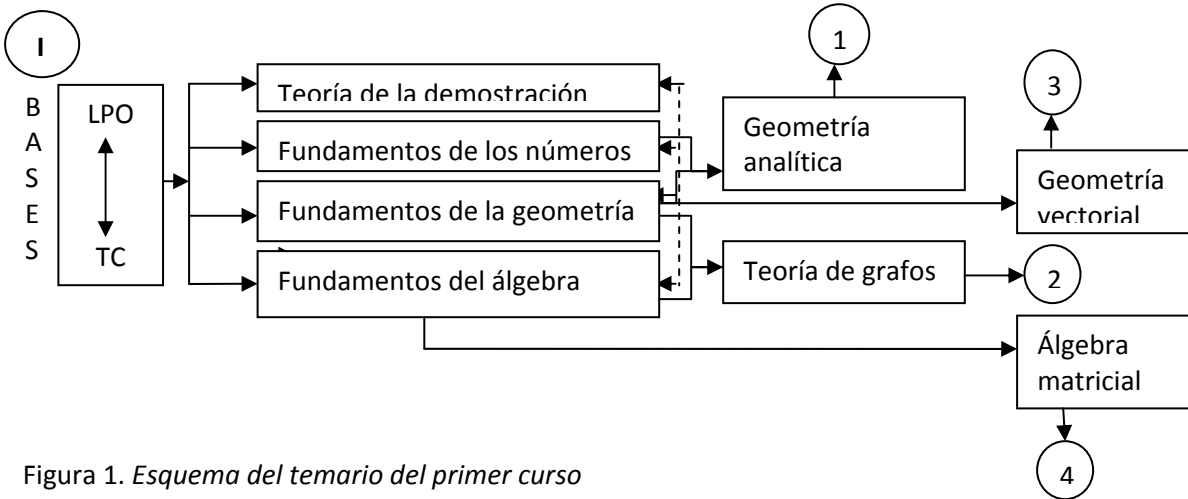


Figura 1. Esquema del temario del primer curso

El primer curso (I) pone los cimientos para construir los otros tres (II, III, IV) que son:

- II) álgebra lineal y teoría de la convexidad,
- III) fundamentos del análisis desde el principio en una, dos y más dimensiones y
- IV) fundamentos de la teoría de la probabilidad, primero en espacios discretos usando grafos y, en particular, árboles, y luego en espacios continuos.

“Uno de los requerimientos más importantes para emprender el estudio de ramas matemáticas diversas es empezar por construir un marco de referencia mental apropiado o estructura que nos permita relacionar e integrar de manera estructurada diversos pedazos de información.” (Michel Rojas, *Comunicación personal*). Este es justamente el papel del curso I.

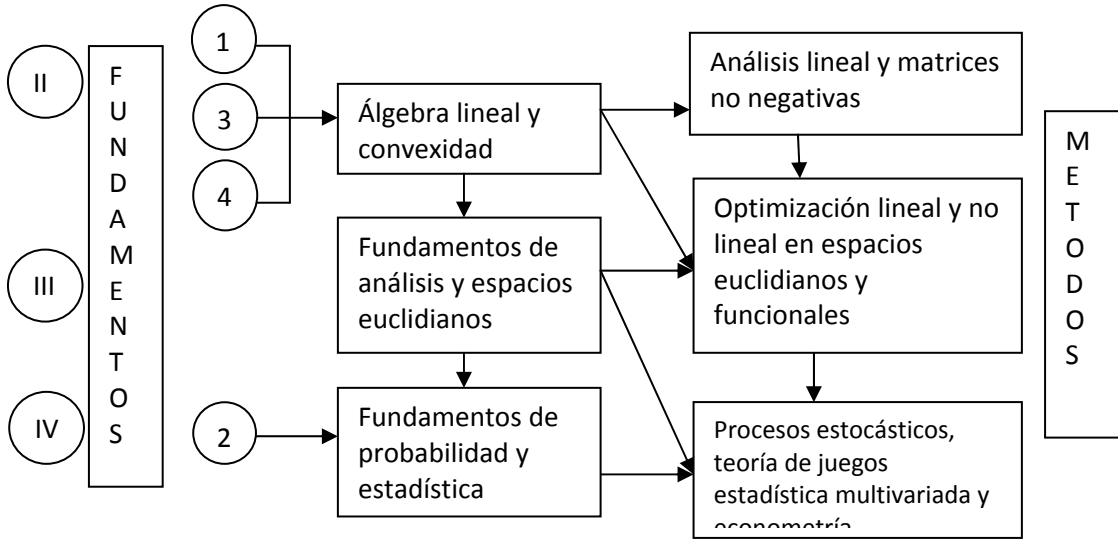


Figura 2. Esquema de los cursos de fundamentos y de métodos

Probablemente habiendo desarrollado las bases que conforman el curso I, los fundamentos que son los cursos II, III y IV requieran solo guías de navegación a través de la bibliografía y no exposiciones como la detallada arriba.

Esta no es una propuesta operativa ni para ser instrumentada en un plan de estudios. Se trata de una imagen objetivo de muy largo plazo, una utopía, que hace posible diseñar algunas actividades, orientar recursos, formar capacidades y proponer reglas que hagan posibles sucesivos acercamientos, distintos cursos de acción hacia ese otro mundo, por definición, imposible.

Por ejemplo, actividades en este sentido pueden ser cursos de formación de ayudantes y profesores en los temas enumerados I, II, III, IV, orientación de recursos para acercarse a la imagen objetivo puede ser la conformación de grupos de estudiantes de servicio social que apoyen a un profesor que ponga en práctica un grupo experimental con este enfoque, formación de capacidades puede ser realizar un seminario con el objetivo de producir material didáctico para los cursos o diseñar e instrumentar un diplomado o una especialización de formación de estudiantes para prepararse para el posgrado o para dar clases de matemáticas en licenciatura. Pero nunca una propuesta de estas características debe servir para instrumentar cambios radicales en el corto plazo.

La justificación final de una propuesta así es pensar que es posible avanzar en la formación matemática de los economistas. En el sentido de que ella sirva como un recurso de razonamiento y crítica para comprender una pluralidad de teorías, para hacer investigación y para trabajar profesionalmente en el diseño de políticas públicas. Una formación que distinga a los economistas egresados de la Facultad de Economía por una concepción del uso de los métodos matemáticos que sea integral – conceptual, razonadora, crítica, constructiva e intuitiva - y no instrumental.

Referencias

Accinelli, Elvio (2012), *Introducción a la matemática para las ciencias sociales*, SMM, en prensa.

Anderson, Philip W., Kenneth Arrow y David Pines (eds.) (1988), *The Economy as an Evolving Complex System*, The Proceedings of the Evolutionary Paths of the Global Economy Workshop, Held September, 1987 in Santa Fe, New Mexico, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Addison-Wesley.

Arthur, W. Brian, David Lane y Steven Durlauf (eds.) (1997) *The Economy as an Evolving System II*, Westview Press; Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity Lecture Notes.

Blume, Lawrence E. y Steven N. Durlauf (eds.) (2005), *The Economy As an Evolving Complex System III: Current Perspectives and Future Directions*, Oxford University Press; Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity.

Carter, Michael (2001), *Foundations of Mathematical Economics*, MIT Press

De la Fuente, Angel (2000), *Mathematical Methods and Models for Economists*, Cambridge University Press.

Gintis, Herbert (2009), *Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction*, Princeton University Press.

Kemeny, John G., Hazleton Mirkill, J. Laurie Snell, Gerald L. Thompson (1959), *Finite Mathematical Structures*, Prentice – Hall.

Kemeny, John G., J. Laurie Snell, Gerald L. Thompson ([1957, 1966], 1974), *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice – Hall.

Kornai, János (1971), *Anti-Equilibrium*. On economic systems theory and tasks of research, Amsterdam: North Holland.

Kornai, János (1980), *Economics of Shortage*, Amsterdam: North-Holland, 2 v.

Kornai, János and Béla Martos (eds.) (1981) *Non-Price Control*, Budapest: Akadémiai Kiadó.

Martos, Bela (1990), *Economic Control Structures, A Non-Walrasian Approach*, North Holland. Contributions to Economic Analysis, núm. 188.

Murata, Yasuo (1977), *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, New York: Academic Press.

Nikaido, Hukukane (1970), *Introduction to sets and mappings in modern economics*, North-Holland/American Elsevier.

Takayama, Akira ([1974], 1985), *Mathematical Economics*, Cambridge University Press.

Takayama, Akira (1994), *Analytical Methods in Economics*, University of Michigan.

Uribe, Pedro (1981), “La expresión matemática de la economía: consecuencias para la formación teórica del economista”, *Documento de trabajo*, Departamento de Planificación y Matemática aplicada, C.I.D.E., A.C.

Weibull, Jörgen (1995), *Evolutionary Game Theory*, Cambridge, MA: The M.I.T. Press